工学・経済系基礎数学案内 (I)

＝ 線形代数入門編＝

大嶋康裕 [*] , 古島幹雄 [†]

2024 年

目 次

*崇城大学 教授
†熊本大学 名誉教授

1 連立１次方程式の解法（消去法による解法）

1.1 １次方程式 $ax = b$ の解

$$
(1.1.1) \qquad \begin{cases} a \neq 0 \Longrightarrow x = \dfrac{b}{a} \ \text{：一意解（解は唯一つ）} \\ \\ a = 0 \Longrightarrow \begin{cases} b = 0 \to 0x = 0 \to \ \text{不定解（解は唯一つでない）} \\ \\ b \neq 0 \to 0x = b(\neq 0) \to \text{不能解（解はなし）} \end{cases} \end{cases}
$$

注意 1.1. $a = 0$ の場合は１次方程式の体をなさず意味がない.

例題 1.1. (1) １次方程式 $3x = 5$ の解を求めよ．答え：$x = \dfrac{5}{3}$.

(2) １次方程式 $ax = 3$ の解が $x = \dfrac{2}{3}$ のとき，$a = \dfrac{9}{2}$.

例題 1.2. 8320 円の予算内で原価 100 円の商品を最大何個まで買えるか.

（解）x 個買えるとする．消費税 10% を入れると定価は 110 円より $x(100+10) = 8320 \quad \therefore \quad x = \dfrac{8320}{110} = 75.64$. x は整数なので結果的に 75 個までは買える.

1.2 連立１次方程式と消去法

x, y を未知数とする連立１次方程式

$$
(1.2.1) \qquad \begin{cases} ax + by = p \ \cdots \ ① \\ cx + dy = q \ \cdots \ ② \end{cases}
$$

の消去法による解法は以下の通り.

①$\times d -$ ②$\times b$ および ②$\times a -$ ①$\times c$ をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned}(ad-bc)x &= dp-bq \ \cdots \ ③\\ (ad-bc)y &= -cp+aq \ \cdots \ ④\end{aligned}$$

よって、$ad-bc \neq 0$ ならば、(1.1.1) により、１次方程式 (1.2.1) の解は以下の通り：

公式 1.1.

$$(1.2.2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{dp-bq}{ad-bc} \\[2ex] y = \dfrac{-cp+aq}{ad-bc} \end{cases}$$

注意 1.2. 連立一次方程式 $(*)$ が一意解をもつためには

$$ad-bc \neq 0$$

でなければならない.

例題 1.3. x, y を連立未知数とする１次方程式 $\begin{cases} 2x+3y=7 \cdots ① \\ 3x-5y=1 \cdots ② \end{cases}$ の解を消去法で求めよ.

<u>解</u>

①$\times 5 +$ ②$\times 3$ より，$19x = 38 \ \therefore x = 2$. 一方，①$\times 3 -$ ②$\times 2$ より，$19y = 19 \ \therefore y = 1$.

$\therefore \quad (x, y) = (2, 1)$

例題 1.4. 次の連立１次方程式の解を公式 (1.2.2) を用いて求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x-5y=3 \\ 4x+3y=-1 \end{cases}$ の解を求めよ.

<u>解</u>

$a=2,\ b=-5\ c=4,\ d=3\,; p=3,\ q=-1$ を公式 (1.2.2) に代入

$$\begin{cases} x=\dfrac{3\times 3-(-1)\times(-5)}{2\times 3-4\times(-5)}=\dfrac{4}{26}=\dfrac{2}{13} \\ y=\dfrac{(-4)\times 3+2\times(-1)}{2\times 3-4\times(-5)}=\dfrac{-14}{26}=\dfrac{-7}{13} \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} ax+2y=5 \\ -2x+ay=3 \end{cases}$ の解を求めよ．

<u>解</u>

$a^2+4\neq 0$ に注意して，公式 (1.2.2) に代入

$$\begin{cases} x=\dfrac{5\times a-3\times 2}{a\times a-(-2)\times 2}=\dfrac{5a-6}{a^2+4} \\ y=\dfrac{-(-2)\times 5+3\times a}{a\times a-(-2)\times 2}=\dfrac{3a+10}{a^2+4} \end{cases}$$

1.3　および特殊な連立１次方程式の解法

ここでは消去法によらない連立１次方程式の解法について述べる．

例題 1.5.　(1) $\begin{cases} ax+by=p\cdots① \\ bx+ay=q\cdots② \end{cases}$ の解を求めよ．但し，$a^2\neq b^2$ とする．

<u>解</u>

① + ② より $(a+b)(x+y)=p+q \quad \therefore \quad x+y=\dfrac{p+q}{a+b}\cdots③.$

① − ② より $(a-b)(x-y)=p-q \quad \therefore \quad x-y=\dfrac{p-q}{a-b}\cdots④.$

③ + ④ および ③ − ④ より，

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{p+q}{a+b}+\frac{p-q}{a-b}=\frac{2(ap-bq)}{a^2-b^2} \quad \therefore \quad x=\frac{ap-bq}{a^2-b^2} \\ 2y &= \frac{p+q}{a+b}-\frac{p-q}{a-b}=\frac{2(aq-cp)}{a^2-b^2} \quad \therefore \quad y=\frac{aq-cp}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} x+2y=4\cdots① \\ 2x+y=5\cdots② \end{cases}$ の解を求めよ.

解

① + ② より $3(x+y)=9$ および ② − ① より $x-y=1$

$$\therefore \quad x+y=3\cdots③, \quad x-y=1\cdots④$$

③ + ④ および ③ − ④

$$\therefore 2x=4, \quad 2y=2 \quad \therefore x=2, \quad y=1$$

1.4 連立一次方程式の行列を用いた表記

連立１次方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ において，a,b,c,d を**係数**という．係数を横（行）と縦（列）に並べた組 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を連立１次方程式の**係数行列**という．また，未知数 x,y を縦（列）に並べた組 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を**未知数（列）ベクトル**と呼び，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ **定数（列）ベクトル**と呼ぶ.

今,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

と定義すれば $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ の関係から $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ となり，最終的に

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と書き表すことができる．これを連立１次方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ の**行列表示**という.

例題 1.6. 次の連立方程式の行列表示は以下の通り.

(1)

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-5y=1 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 $(x,y)=(2,1)$.

(2)

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -3x+2y=7 \\ 7x-5y=2 \end{cases}$$

解 $(x,y)=(-39,-55)$.

1.5　連立一次方程式のベクトル表記

２つの数の組を（２次元）ベクトルという．そのとき，ベクトルには２種類のベクトルがある．

(1) 行ベクトル（横ベクトル）$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

(2) 列ベクトル（縦ベクトル）$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

注意 1.3. ベクトルの和やスカラー積（定数倍）について以下のように定義する．

(1) $p\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \end{pmatrix}$

(2) $p\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+qc \\ pb+qd \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=u \\ y=v \end{cases}$

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=u \\ y=v \end{cases}$

連立１次方程式の行列表示 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ において，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ cx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} by \\ dy \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

より係数行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の１列（目）ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，２列（目）ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \overset{\text{同値}}{\iff} x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表すことができる．これを**連立１次方程式のベクトル表示**という．

例題 1.7. 次の連立１次方程式をベクトル表示する．

(1) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 7x + 2y = -2 \end{cases} \iff x\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{cases} -3x + 7y = 1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \iff x\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

例題 1.8. 次の例について，どれも同じ連立一次次方程式である．

(1) $x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

(4) $-x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x - y = 2 \\ -x + y = 5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ または

$$-x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff x\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と変形してもよい．

<u>解</u> (1) : $(x, y) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ (2) : $(x, y) = (-8, -5)$ (3) : $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$
(4) : $(x, y) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{1}\right)$.

2　クラメールの公式（２次元版）

2.1　２次の行列式

定義 2.1 (行列式). 2×2-行列（2 次正方行列）$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して

$$|A| := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

を 行列 A の行列式という．行列式の計算のルールは，襷（たすき）掛けと言われる以下の方法で行う．

$$\begin{array}{rl} & - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \\ & + \end{array}$$

例題 2.1. つぎの行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = 14 - 12 = 2$

(2) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-7) - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 3 \cdot 15 - 6 \cdot 10 = 45 - 60 = -15$

(4) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 0$ を満たす a を求める．

実際，$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4$ ゆえ $a^2 - 4 = 0 \quad \therefore \quad a = \pm 2$

命題 2.1. 行列式の定義：$\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} := xw - yz$ から次を得る．

(1) $\begin{vmatrix} z & w \\ x & y \end{vmatrix} = zy - xw = -(xw - yz) = -\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$（１行と２行の入れ替え）

(2) $\begin{vmatrix} cx & cy \\ dz & dw \end{vmatrix} = cdxw - cdyz = cd(xw - yz) = cd\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$（１行の c 倍，２行の d 倍）

(3) $\begin{vmatrix} x & y \\ cx & cy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cx & cy \\ x & y \end{vmatrix} = cxy - cxy = 0$（２行が１行の c 倍，または１行が２行の c 倍）

(4) $\begin{vmatrix} x \pm x_0 & y \pm y_0 \\ z & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ z & w \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} x & y \\ z \pm x_0 & w \pm y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} x \pm x_0 & z \\ y \pm y_0 & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} x_0 & z \\ y_0 & w \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} x & z \pm z_0 \\ y & w \pm w_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}$

例題 2.2. $\begin{vmatrix} 2a+2 & -a+3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & -a \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4a - (-5a) + 4 - 15 = 9a - 11$

2.2　２次元クラメールの公式

一般の２元連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

の解は公式 1.1(1.2.2) より $\underline{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0}$ ならば

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \\ \\ x_2 = \dfrac{-b_1 \cdot a_{21} + b_2 \cdot a_{11}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \end{cases}$$

を得る．一方，2×2-行列の行列式の定義から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\ , \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_1 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}\ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = -b_1a_{21} + b_2a_{11}$$

であることであることが分かる．

定理 2.1. 連立一次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ または $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の解は $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ ならば

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

で与えられる．これを（２次元版の）**クラメールの公式**という)．

例題 2.3. クラメールの公式を適用して次の（行列表示された）連立一次方程式の解を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 46 \end{vmatrix}} = 1\ ,\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = 1$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1\ ,\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 2$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = -1\ ,\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = -1$

(4) $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ -2x + 3y = 13 \end{cases} \iff x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-44}{22} = -2, \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{66}{22} = 3$

(5) $\begin{cases} -2x + 3y = 7 \\ 6x - 9y = 13 \end{cases}$ の解について

係数行列の行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$ ゆえ，この連立１次方程式は解を持たない．

2.3　連立１次方程式の行列とベクトルを用いた表示

一般の連立１次方程式の行列表示について

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおく.

そのとき，n 個の未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$，一次方程式の数 m 個の連立一次方程式は

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と表わされる，一方,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

と表示できる．これを行列 A の**列ベクトル表示**という．このとき,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b} \iff x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

例題 2.4.　(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,　$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,　$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

注意 2.1. クラメールの公式を行列のベクトル表示を用いた形で表現しよう.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

とおく．そのとき，A の行列式は $|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}$ と表される.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Longleftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

の解ベクトル $\mathbf{x}$ は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ \\ \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}} \\ \\ \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}} \end{pmatrix}$$

で与えられる（クラメールの公式の列ベクトル表記版）

3　行列の連立１次方程式に対するクラメールの公式

行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ を未知行列とし $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ を定数行列とする．そのとき，X, Y に関する連立１次方程式

$$\begin{cases} aX + bY = P \cdots ① \\ cX + dY = Q \cdots ② \quad (ad - bc \neq 0) \end{cases}$$

このとき，消去法により，即ち，① $\times d -$ ② $\times b$ および ② $\times a -$ ① $\times c$ を計算して

$$\begin{cases}(ad-bc)X = \quad dP - bQ \\ (ad-bc)Y = -cP + aQ\end{cases}$$

を得る．$ad - bc \neq 0$ より

$$\therefore \quad (3.3.1) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{1}{ad-bc}(\ \ dP - bQ) \\ Y = \dfrac{1}{ad-bc}(-cP + aQ)\end{cases}$$

例題 3.1. 行列の連立一次方程式の消去法による解法を与える．

(1) $\begin{cases} 2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}\end{cases}$ を満たす行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$

を求めよ．

（解）

$$\begin{cases} 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix} \cdots ① \\ A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2\end{pmatrix} \cdots ② \end{cases} \overset{②\times 3}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix} \\ 3A + 3B = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6\end{pmatrix}\end{cases}$$

辺辺加えて，

$$5A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 7\end{pmatrix}$$

$$\therefore \ A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\dfrac{1}{5} \\ 1 & \dfrac{7}{5}\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2\end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & -\dfrac{4}{5} \\ 0 & \dfrac{3}{5}\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3\end{pmatrix} \cdots ① \\ \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2\end{pmatrix} \cdots ②\end{cases}$ を解け．

実際，① × 2 − ② より

$$Y = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

① より，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

例題 3.2. クラメールの公式行列版を利用して次の行列の連立一次方程式の解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =: P \\ \\ 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =: Q \end{cases}$ を解け．

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$ より，クラメールの公式の行列版から

$X = 3P - 2Q = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad Y = 3Q - 4P = \begin{pmatrix} -17 & -4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ を得る．

(2) $\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =: P \\ \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =: Q \end{cases}$ を解け．

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ より，クラメールの公式の行列版から

$X = 2P - 3Q = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad Y = 2Q - P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を得る．

4 行列とベクトル

3節までは連立１次方程式の解に関するクラメールの公式に絡めて行列やベクトルについて形式的に取り扱った．この節では行列やベクトルに関し，定義や一般的性質について解説する．

4.1　行列の相等，和及びスカラー積について

mn 個の実数または複素数 a_{ij} $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ を縦横に並べた

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

を (m, n) 型行列または $m \times n$-行列という．

・$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$：$A$ の $\underline{1\text{行}}$（ベクトル）

・$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$：$A$ の $\underline{2\text{行}}$（ベクトル）

・$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$：$A$ の $\underline{i\text{行}}$（ベクトル）

$\vdots$

・$\mathbf{a}_m = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$：$A$ の $\underline{m\text{行}}$（ベクトル）

という．また,

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \tilde{\mathbf{a}}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ldots \quad \tilde{\mathbf{a}}_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

をそれぞれ，　$\underline{1\text{列}}$（ベクトル），　$\underline{2\text{列}}$（ベクトル），　$\underline{j\text{列}}$（ベクトル），　$\underline{n\text{列}}$（ベクトル）という．

A の (i, j)-成分とは A の i-行と j-列，即ち，A の上から i 番目そして左から j 番目に位置する数 a_{ij} を示す．そのとき，(m, n) 型の行列 A は行ベクトル $\mathbf{a}_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ 及び列ベクトル $\tilde{\mathbf{a}}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ を

用いて

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{a}}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{a}}_j & \cdots & \tilde{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix}$$

を表すことができる．これらをそれぞれ A の**行ベクトル表示**及び**列ベクトル表示**という．

注意 4.1. (m,n) 型行列 A の (i,j)-成分を $(A)_{ij}$ で表すこともある．(4.1.1) のように行列 A が成分 a_{ij} を用いて表示されている場合は

$$(A)_{ij} = a_{ij}\ (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$$

より，混乱を避けるために与えられた成分 a_{ij} を用いる．

注意 4.2. $(m.n)$ 型行列 A の転置行列 A^{T} とは A の行と列を入れ替えて得られる行列をいう．即ち，A の i-行は A^{T} の i-列になっている．成分で示せば

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)_{ij} = (A)_{ji}\ (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$$

こうして，A^{T} は (n,m) 型行列である．特に．

$$A^{\mathrm{TT}} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$$

が成り立つ．

例. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_i & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$

注意 4.3. 行ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ は $(1, n)$ 型行列と見做せ，列ベクトル $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ は $(m, 1)$ 型行列と見做せる．即ち，ベクトルは一つの行列として扱うことができる．

例題 4.1. (1) $(2, 3)$ 型行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{a}}_2 & \tilde{\mathbf{a}}_3 \end{pmatrix}$. 但し，

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(2) $(3, 2)$ 型行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}$. 但し，

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

次に，

(1) A を (m, n) 型行列，B を (p, q) 型行列とする．そのとき，A と B が等しいとは，A と B の型が同じで，A, B の対応する成分が等しいとき，即ち，

$$A = B \Longleftrightarrow m = p\ , n = q \quad \& \quad (A)_{ij} = (B)_{ij}\ (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$$

を満たすときをいう．

(2)　行列 A と B の和（差）$A \pm B$ は A と B の型が同じ (m,n) 形のときに限って定義され，$A \pm B$ の (i,j)-成分については

$$(A \pm B)_{ij} = (A)_{ij} \pm (B)_{ij} \ \ (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$$

が成り立つ．

(3) (m,n) 型の行列 A のスカラー積（定数倍）$c \cdot A$ （c は定数）について

$$(cA)_{ij} = c \cdot (A)_{ij} \ \ (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$$

が成り立つ．

例題 4.2.

(1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 & 3+1 \\ 4+6 & 5+5 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{pmatrix}$, $(-3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 9 \\ -12 & 15 \end{pmatrix}$

4.2　行列の積

2 つの行列 A と B の積 $A \cdot B$ は A の行の数と B の列の数が等しいときに限り定義できる．A を (m,n) 型行列とし B を (n,ℓ) 型行列とする．このとき，A と B の積 $A \cdot B$ は定義され (m,ℓ) 型の行列

になる．

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ell}\\ \vdots & & & \vdots\\ b_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i\ell}\\ \vdots & & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n\ell}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (AB)_{11} & (AB)_{12} & \cdots & (AB)_{1\ell}\\ \vdots & & & \vdots\\ (AB)_{i1} & (AB)_{i2} & \cdots & (AB)_{i\ell}\\ \vdots & & & \vdots\\ (AB)_{m1} & (AB)_{m2} & \cdots & (AB)_{m\ell}\end{pmatrix}$$

ここに，

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\ (1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq \ell)$$

と定義する．

注意 4.4. A の i-行ベクトル $\mathbf{a}_i=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$ 及び B の j-列ベクトル $\widetilde{\mathbf{b}}_j=\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{mj}\end{pmatrix}$ をそれぞれ $(1,n)$-型行列，$(n,1)$-型行列と見做し，その積をとると

$$\mathbf{a}_i\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_j=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{mj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=(AB)_{ij}$$

を得る．$A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{b}}_1 & \widetilde{\mathbf{b}}_2 & \cdots & \widetilde{\mathbf{b}}_n\end{pmatrix}$ をそれぞれ A の行ベクトル表示，B の列ベクトル表示とすれば

$$AB=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{b}}_1 & \widetilde{\mathbf{b}}_2 & \cdots & \widetilde{\mathbf{b}}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_n\\ \mathbf{a}_2\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{a}_m\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_1 & \mathbf{a}_m\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\cdot\widetilde{\mathbf{b}}_n\end{pmatrix}$$

例. (1)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{1}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

(5) $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & b_{11}a_{13} \\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} & b_{21}a_{13} \\ b_{31}a_{11} & b_{31}a_{12} & b_{31}a_{13} \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 5 & 10\\ 5 & 1 & -2\\ 2 & 13 & 19\end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 7 & 8\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & 15\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 7\\ 22 & 15\end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} := E$（単位行列）

(11) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} := O$（零行列）

(12) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

注意 4.5. (i) 一般に，行列 A, B に対し，$AB \neq BA$.

（実際，例題 4.3 の (12) を見よ.）

(ii) 一般に $A \neq O$, $B \neq O$ であっても，$AB \neq O$ とは限らない.

（実際，例題 4.3 の (11) を見よ.）

(iii) $BA = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}\\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}\end{pmatrix}$.

このことからも一般には $AB \neq BA$ であることが分かる. .

定義 4.1. 行列

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を**対角行列**といい，特に，$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ のとき，即ち，

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を**単位行列**（正確には n 次単位行列）という．また，全ての成分が 0 である行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

をゼロ行列という．

命題 4.1. 行列 A, B, C 及び**零行列** O, 単位行列 E に対し，

(1) $A + O = O + A = A$

(2) $AE = EA = A$

(3) $A(B + C) = AB + AC$

(4) $(A + B)C = AC + BC$

(5) $A(BC) = (AB)C$（やや面倒）

(6) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. 特に $AB = BA$（可換）ならば

$$A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

証明. 証明は左辺と右辺の行列の対応する成分をそれぞれ比較することにより得られる.

命題 4.1-(3),(4),(5) を次の具体的な例で確かめる.

例題 4.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ のとき

(3)

$$\begin{aligned} A(B+C) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -16 \\ 23 & -16 \end{pmatrix} \\ AB + AC &= \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 19 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -16 \\ 23 & -16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad A(B+C) = AB + AC$$

(4)

$$\begin{aligned} (A+B)C &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -51 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ AC + BC &= \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & -43 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -51 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (A+B)C) = AC + BC$$

(5)

$$
\begin{aligned}
A(BC) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & -43 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 26 & -55 \\ 62 & -117 \end{pmatrix} \\
(AB)C &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 19 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 26 & -55 \\ 62 & -117 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad A(BC) = (AB)C$$

例題 4.4. $(AB)C = A(BC)$ を適用した 3 つの行列の積の計算.

(1)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(2)

定義 4.2. 行列 A に対し，帰納的に,

$$A^2 := A \cdot A,\ A^3 = A \cdot (A^2), \ldots,\ A^n = A(A^{n-1})\ (n \geqq 3)$$

と定義する．この行列 A^n を A の n 乗という．

例. 因みに,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

4.3　ケーリー・ハミルトンの公式

命題 4.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} \\
(a+d)A &= (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} \\
(ad-bc)E &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad (a+d)A-(ad-bc)E &= \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} \\
&= A^2
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad A^2-(a+d)A+(ad-bc)E = O$$

□

例題 4.5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ のベキ乗を求めよ．ケーリー・ハミルトンの公式から

$$A^2 - 2A + 4E = 0$$

こうして

$$\begin{aligned}
A^2 &= 2A-4E \\
A^3 &= A\cdot A^2 = A\cdot(2A-4E) = 2A^2-4A = 2(2A-4E)-4A = -8E \\
A^4 &= A\cdot A^3 = A\cdot(-8E) = -8A \\
A^5 &= A\cdot A^4 = A\cdot(-8A) = -8A^2 = -8(2A-4E) = -16A+32E \\
A^6 &= A\cdot A^5 = A\cdot(-16A+32E) = -16A^2+32A = -16(2A-4E)+32A = 64E
\end{aligned}$$

5 正方行列の逆行列

5.1 逆行列

以後，(n,n)-型行列を n 次正方行列と呼び，(n,n)-型の単位行列 $E := E_n$ を n 次単位行列と呼ぶ．

定義 5.1. n-正方行列 A の逆行列とは

$$AX = XA = E \ (= E_n)$$

を満たす n 次正方行列 X をいう．

注意 5.1. 逆行列は正方行列に対してのみ存在する概念である．

命題 5.1. A の逆行列は存在すればただ一つである．

証明. X, Y を A の逆行列とすると $\begin{cases} AX = XA = E \cdots ① \\ AY = YA = E \cdots ② \end{cases}$ を得る．

$$X = XE \overset{②より}{=} X(AY) = (XA)Y \overset{①より}{=} EY = Y$$

$\therefore$ $X = Y$，即ち，逆行列は存在すれば唯一つ． □

注意 5.2. A の逆行列 X は存在するならば唯一つであることから A に因んで $X = A^{-1}$ という記号を用いる（読みは A の inverse：インバース）

5.2　連立１次方程式系と逆行列

次の n 次正方行列の成分表示：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

に対し，X 及び E の列ベクトル表示を

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{i1} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots \mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}, \quad \dots \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{in} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

及び

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．そのとき，

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_j & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_j & \dots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

と表され

$$\begin{aligned}
AX=E &\iff A\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_j & \ldots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_j & \ldots & \mathbf{e}_n\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \ldots & A\mathbf{x}_j & \ldots & A\mathbf{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_j & \ldots & \mathbf{e}_n\end{pmatrix}\\
&\iff (*)\quad \begin{cases}A\mathbf{x}_1=\mathbf{e}_1\cdots ① \\ A\mathbf{x}_2=\mathbf{e}_2\cdots ② \\ \qquad\vdots \\ A\mathbf{x}_j=\mathbf{e}_j\cdots ⓙ \\ \qquad\vdots \\ A\mathbf{x}_n=\mathbf{e}_n\cdots ⓝ\end{cases}
\end{aligned}$$

を得る．こうして連立１次方程式の系 $(*)$ の解 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ を求めれば逆行列 X は求まる．このことから，逆行列を求める問題は連立１次方程式の解の問題に帰着することが分かる.

注意 5.3. 行列 AX の第 j 列ベクトルは $A\mathbf{x}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ であることから

$$A\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_j & \ldots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \ldots & A\mathbf{x}_j & \ldots & A\mathbf{x}_n\end{pmatrix}$$

が分かる．j を固定して両辺の (i,j) 成分を比較することで示せる（各自試みよ）

そこで，$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ii} & & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，　$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$，　$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$ とおき，連立１次方程式

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\iff\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1i}x_i+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2i}x_i+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ii}x_i+\cdots+a_{in}x_n=b_i\\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{ni}x_i+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

の解とその逆行列を求める問題への応用について以下 $n=2,3$ の場合に考察しよう.

5.3　２元連立１次方程式の解法と２次正方行列の逆行列

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおく.

そのとき，２元連立１次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ の解はクラメールの公式より

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

であった.

このクラメールの公式を用いて２次正方行列の逆行列を求めよう．まず,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix},$$

とおくと

$$AX = E \iff \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \ \cdots \ \text{(i)} \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \ \cdots \ \text{(ii)} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \ \cdots \ \text{(iii)} \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \ \cdots \ \text{(iv)} \end{cases}$$

を得る.

(i),(iii) は $x_{11}.\ x_{21}$ を未知数とする連立一次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$$

(ii),(iv) は x_{12}, x_{22} を未知数とする連立一次方程式

$$(**) \quad \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff a\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$$

で表せるので $(*)$ の解 および $(**)$ の解 $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ はそれぞれクラメールの公式より $|A| =$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ならば

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}}{|A|}, \quad x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{21}}{|A|}$$

と表される．同様に，(ii),(iv) から

$$x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{12}}{|A|}, \quad x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}}{|A|}$$

こうして，

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{|A|} & \dfrac{-a_{12}}{|A|} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{|A|} & \dfrac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

を得る．以上のことから，

定理 5.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し，行列式 $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ ならば A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

で与えられる．

例題 5.1. 次の行列の逆行列は求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \quad \because \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad \because \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1$

定理 5.2 (積の逆行列)**.** 行列式 $|A| \neq 0,\ |B| \neq 0$ の時，$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ が成り立つ．

証明（読み飛ばして良い）

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(B \cdot B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(E \cdot A^{-1}\right) = AA^{-1} = E$$

逆行列は存在すれば唯一つなので $B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列である．$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$． □

例題 5.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対し，$B^{-1}A^{-1}$ を求めよ．

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

5.3.1 行列の積の行列式

定理 5.3. 行列の積の行列式に関して

$$|AB| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

が成り立つ．

実際,

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{11}b_{22} + a_{12}b_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) - a_{21}a_{12}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\
&= |A| \cdot |B|
\end{aligned}
$$

を得る.

命題 5.2. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

実際，A^{-1} が存在することから $|A| \neq 0$.

また，$A \cdot A^{-1} = E$ ゆえ，$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1 \ \therefore \ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

例題 5.3. $\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \right| = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{3}$

注意 5.4. (1) 行列 A の逆行列がなければ（即ち，行列式 $|A| = 0$ ならば）

$$|ABC| = |BCA| = |CAB| = 0$$

(2) $AB \neq BA$ であっても $|AB| = |BA|$ が成り立つ.

例題 5.4. 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\left|\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\-2&3\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&5\\-2&3\end{vmatrix} = 1\times 13 = 13$

(2) $\left|\begin{pmatrix}a&1\\1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}\right| = 0$ を満たす a を求めよ.

実際, $\left|\begin{pmatrix}a&1\\1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}a&1\\1&a\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&a\\a&1\end{vmatrix} = -(a^2-1)^2 = 0 \quad \therefore \quad a = \pm 1.$

(3) $\left|\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&2\\3&4\end{pmatrix}\right| = 0$ を満たす a を求めよ.

実際, $\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a&2\\3&4\end{vmatrix} = (-1)\times(4a-6) = 0 \quad \therefore \quad a = \dfrac{3}{2}.$

(4) $\left|\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} = 0. \qquad (\because \begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix} = 0)$

(5) $\left|\begin{pmatrix}1&1\\2&5\end{pmatrix}^{-1}\right| = \dfrac{1}{\begin{vmatrix}1&1\\2&5\end{vmatrix}} = \dfrac{1}{3}$

(6) $\left|\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}^{-1}\right|\cdot\begin{vmatrix}1&4\\3&2\end{vmatrix} = \dfrac{\begin{vmatrix}1&4\\3&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\-2&3\end{vmatrix}} = -\dfrac{10}{7}$

(7) $\left|\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&3\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix} = 1\times 1\times 7 = 7$

(8) $\left|\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&3\end{pmatrix}\right| = \dfrac{\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}} = \dfrac{1\times 7}{1} = 7$

(9) $\left|\begin{pmatrix}5&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\right| = \dfrac{\begin{vmatrix}5&1\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}} = \dfrac{4}{1\times 7} = \dfrac{4}{7}$

5.3.2　連立１次方程式の逆行列を使った解

(1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおく．この時，連立１次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

の解 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ならば A^{-1} が存在するので $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の両辺に左から A^{-1} を掛けて

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

を得る．

定理 5.4.　連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(2) 行列の連立１次方程式

$$AX = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

の解は両辺左から A^{-1} を掛けて

$$X = A^{-1}B \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

例題 5.5. 逆行列を用いて次の連立一次方程式の解を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

例題 5.6. (1) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

5.3.3 補足：行列の対角化と三角化

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし，$bc \neq 0$ と仮定する．行列 A の**固有方程式**とは λ を未知数とする次の 2 次方程式

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad \cdots \quad (5.7.1)$$

をいい，(5.7.1) の解を**固有値**という．特に，

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

固有値 λ を行列 A で置き換えた行列の関係式

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \cdots \quad (5.7.2)$$

を**ケーリー・ハミルトンの公式**と呼ぶ．今，２次方程式 (5 . 7 .1) の判別式

$$(*) \quad D = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc \neq 0$$

と仮定する．この時，２次方程式 (5.7.1) は２つの異なる解をもつ（一般に実数とは限らない）．２つの解をそれぞれ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ で表すと，解と係数の関係式から

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + d \\ \lambda_1 \lambda_2 = ad - bc \end{cases}$$

を得る．そこで $P = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix}$ とおくと，逆行列 $P^{-1} = \dfrac{1}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 - a & -b \\ a - \lambda_1 & b \end{pmatrix}$. そこで，$\lambda_1 - a = d - \lambda_2$ に留意すれば簡単な計算により

$$\therefore \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{（対角行列）}$$

を得る．これを行列 A の**対角化**という．また，行列 P を A を対角化する行列という．一方，

$$(*) \quad D = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = 0$$

のときは，固有方程式 (5.7.1) は２重根（２重解）$\lambda = \dfrac{a+d}{2}$ をもつ．

$bc \neq 0$ より $b \neq 0$． $P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ \lambda\_a & 1 \end{pmatrix}$ とおく．そのとき，$\lambda - a = d - \lambda$, および $(a-d)^2 + 4bc = 0$ に注意すれば

$$P^{-1}AP = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \lambda & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ \lambda\_a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{（上三角行列）}$$

を得る．

例題 5.7.　(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．固有方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ の解は $\lambda = 1, 3$． $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ を得る．

(2) $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ とする．固有方程式 $\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^3=0$ の解は $\lambda=3$．$P=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ を得る．

6　３次正方行列

6.1　３次正方行列の演算

行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$ に対し，加法とスカラー積（定数倍）および積（乗法）について

$$\begin{aligned}
A\pm B &= \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23}\\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33}\end{pmatrix}\\
cA &= c\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ca_{11} & ca_{12} & ca_{13}\\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23}\\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

また，２つの３次正方行列の積について

$$\begin{aligned}
A\cdot B &= \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(AB)_{11} & (AB)_{12} & (AB)_{13}\\ (AB)_{21} & (AB)_{22} & (AB)_{23}\\ (AB)_{31} & (AB)_{32} & (AB)_{33}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{13}\\ b_{23}\\ b_{33}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{13}\\ b_{23}\\ b_{33}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{13}\\ b_{23}\\ b_{33}\end{pmatrix}
\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

例題 6.1. (1) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -3\\ 5 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 7\\ 6 & -1 & 1\\ 2 & 9 & -5\end{pmatrix}$

$$
=\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 9\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 1\\ -5\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}3 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 9\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 1\\ -5\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 9\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 1\\ -5\end{pmatrix}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}-2-6+6 & 3+1+27 & 7-1-15\\ -6+12-6 & 9-2-27 & 21+2+15\\ -10+6+8 & 15-1+36 & 35+1-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 31 & -9\\ 0 & -20 & 38\\ 4 & 50 & 16\end{pmatrix}
$$

(2)
$$
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}=
\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 9\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 9\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 9\end{pmatrix}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}1+4+9 & 4+10+18 & 7+16+21\\ 4+10+18 & 16+25+36 & 28+40+54\\ 7+16+27 & 28+40+54 & 49+64+81\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 32 & 50\\ 32 & 77 & 122\\ 50 & 122 & 194\end{pmatrix}
$$

(3)
$$
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=
\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 8\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 9\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 8\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 9\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 8\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 9\end{pmatrix}
\end{pmatrix}=
$$

$$\begin{pmatrix} 1+8+21 & 4+10+24 & 3+12+27 \\ 4+20+42 & 8+25+48 & 12+30+54 \\ 7+32+63 & 14+40+72 & 21+48+81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix}$$

問題 6.1. 次の行列式の積について確認せよ.

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 13 \\ 5 & 12 & 34 \\ 9 & 32 & 43 \end{pmatrix}$$

7　クラメールの公式（II）

7.1　３次元版クラメールの公式

３元連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \cdots ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \cdots ② \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \cdots ③ \end{cases}$$

の解を求めよう.

①, ② より,

$$\begin{cases} a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{21}x_1 \cdots ④ \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_1 \cdots ⑤ \end{cases}$$

２次元版のクラメールの公式より

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} b_2 - a_{21}x_1 & a_{23} \\ b_3 - a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdots ⑥ \\ \\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 - a_{21}x_1 \\ a_{32} & b_3 - a_{31}x_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdots ⑦ \end{cases}$$

ここで，⑥, ⑦ の第２項と第３項が等しいことは公式 2.1 の公式を適用した.

②, ③ の両辺に $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ を掛けて ⑥, ⑦ を①に代入し x_1 で括ると,

$$\left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) x_1$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} \qquad \cdots \qquad (9.1.1)$$

を得る．そこで,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

とおく．この $|A|$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式という．

2 次正方行列式を展開することにより

3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12}}) - (\mathbf{a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{12} + a_{33}a_{12}a_{21}})$$

を得る．このことから，容易に

補題 7.1. 行列式の展開について次の３通りの表示ができる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{（１行展開公式）} \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{（２行展開公式）} \tag{1.2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{（３行展開公式）} \tag{1.3}$$

これらの値は，いずれも

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{12} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

である．

が得られる．

注意 7.1. 行列式の列ベクトルを用いた表現について n 次正方行列 A の行列式 $|A|$ を列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_j, \dots \mathbf{a}_n$ を用いて

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_j & \dots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

と表す．

一方，行列式の１行展開公式から

$$b_1\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

であることが分かる．このことから，(9.1.1) は次のように表される．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdots (\mathrm{I})$$

同様に，①,③から

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{13}x_3 = b_2 - a_{12}x_2 \cdots ⑧ \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{32}x_2 \cdots ⑨ \end{cases}$$

同様に．クラメールの公式を適用して，x_1, x_3 を x_2 の式で求め②に代入して x_2 で纏め，x_3 についても①,②から x_1, x_2 を x_3 の式で求め③に代入する．こうして，最終的に

$$\left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \right) x_1 = b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\left(-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) x_2 = -a_{21} \begin{vmatrix} b_1 & a_{13} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\left(a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) x_3 = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

を得る．行列式の行展開公式（補題）から最終的に次を得る．

補題 7.2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdots (\mathrm{I})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \cdots (\mathrm{II})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \cdots (\mathrm{III})$$

以上より

定理 7.1. ３元連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \cdots (i) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \cdots (ii) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \cdots (iii) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

の解は行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ ならば,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

または，A の列ベクトル表示 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}} \\ \\ \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b} & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}} \\ \\ \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}} \end{pmatrix}$$

と表すことができる．これを**３次元クラメールの公式**という．

命題 7.1. 行列式 $|A|$ の行ベクトル表示 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$ に対し,

(I) $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}$ （２つの行ベクトルを入れ替える）

(II) $\begin{vmatrix} c\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ c\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ c\mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} c\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$ （ある行ベクトルを c 倍する）

(III) $\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_3\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=0$（2つの行ベクトルが等しい）

(IV) $\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1+\mathbf{b}\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{b}\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2+\mathbf{b}\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{b}\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3+\mathbf{b}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{b}\end{vmatrix}$（加法性）

(V) $\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1+c\mathbf{a}_i\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2+c\mathbf{a}_j\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3+c\mathbf{a}_k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}$ $(i\neq 1,\ j\neq 2,\ k\neq 3)$. *(ある行ベクトルの c 倍を他の行ベクトルに加える)*

例. $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}\overset{\textcircled{1}\times(-4)+\textcircled{2}}{=}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\7&8&9\end{vmatrix}\overset{\textcircled{1}\times(-7)+\textcircled{3}}{=}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&-6&-12\end{vmatrix}=(-3)(-6)\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0.$
(III) を適用した（2行と3行が同じ).

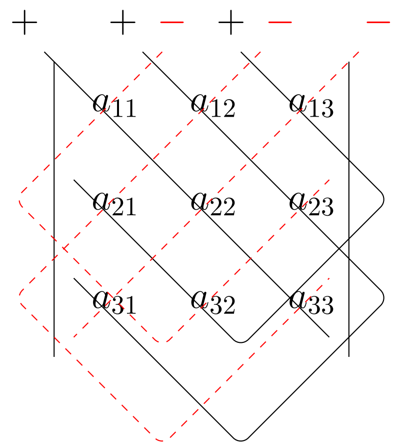
7.2　サラスの公式

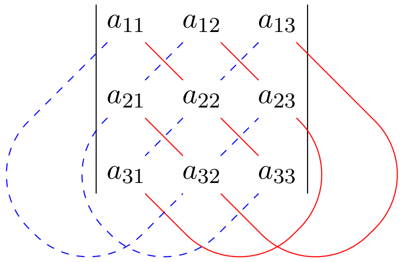
注意 7.2. 3次行列式のサラスの方法の計算法：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\|$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{23}a_{12}-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{12}a_{21})$$





例題 7.1. 次の行列式をサラスの方法で計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 3 - 18 + 4 + 2 = 5$

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(4) x を未知数とする 3 次方程式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ の解を求めよ.

<u>解.</u> $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0 \quad \therefore \quad x = 1,\ -2.$

例題 7.2. 3 次元版クラメールの公式を用いて次の 3 元連立 1 次方程式の解を求める.

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}},\ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -5$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{10}{5} \\ \\ \dfrac{5}{5} \\ \\ -\dfrac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 3\ , \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 2\ , \ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

8　3次正方行列の逆行列

8.1　クラメールの公式と逆行列

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の逆行列とし，X 及び単位行列 E の各列ベクトルを

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

また,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$$

を A の列ベクトル表示とする．但し，$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$，　$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$，　$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}$，

とおく．この時,

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & A\mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ．$\therefore \quad AX = E \Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & A\mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad \begin{cases} A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \text{(i)} \\ A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \text{(ii)} \\ A\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots \text{(iii)} \end{cases}$$

ここで，$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \neq 0$ とする．

このとき，クラメールの公式から

$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$, 即ち，$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解は

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}$$

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}$$

$$x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}$$

次に，$A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$, 即ち， $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解は

$$
\begin{aligned}
x_{12} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}} \\
x_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}} \\
x_{32} &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}
\end{aligned}
$$

最後に，$A\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$，即ち，$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解は

$$
\begin{aligned}
x_{13} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}} \\
x_{23} &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}} \\
x_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}}
\end{aligned}
$$

と表される．これら 9 個の $x_{11}, x_{12}, \ldots x_{33}$ を成分にもつ以下の行列 X が A の逆行列である．

定理 8.1. A の逆行列 $X = A^{-1}$ は行列式 $|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \neq 0$ ならば

$$
X = A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
$$

8.2　余因子と余因子行列

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の i 行と j 列を除いた残りの 2×2 行列の行列式を D_{ij} とおく.

$$\Delta_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij}\ (1 \leqq i, j \leqq 3) \ = \begin{cases} +D_{ij} & \text{if} \quad i+j \text{ は偶数} \\ -D_{ij} & \text{if} \quad i+j \text{ は奇数} \end{cases}$$

を A の (i,j)-**余因子**という.

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
\Delta_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
\Delta_{13} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\ \Delta_{23} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\ \Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

特に,

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix},\ \Delta_{21} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix},\ \Delta_{31} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \\
\Delta_{12} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix},\ \Delta_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix},\ \Delta_{23} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \\
\Delta_{13} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_1 \end{vmatrix},\ \Delta_{32} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_2 \end{vmatrix},\ \Delta_{33} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

を得る.

　そこで

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} +D_{11} & -D_{21} & +D_{31} \\ -D_{12} & +D_{22} & -D_{32} \\ +D_{13} & -D_{23} & +D_{33} \end{pmatrix}$$

とおく. この $\tilde{A}$ を A の**余因子行列**という. このとき, $A \cdot \tilde{A} = |A| \cdot E$ を得る. 特に, $|A| \neq 0$ ならば A の逆行列は A の余因子行列 $\tilde{A}$ を用いて

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} +D_{11} & -D_{21} & +D_{31} \\ -D_{12} & +D_{22} & -D_{32} \\ +D_{13} & -D_{23} & +D_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

と表される.

注意 8.1. 逆行列 A^{-1} の各 x_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq 3)$ を具体的な式は以下の通り：

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_{12} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_{13} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_{21} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_{23} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_{32} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_{33} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

こうして A の逆行列 A^{-1} は $|A| \neq 0$ のとき存在し

$$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

例題 8.1. （1） $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = A^{-1}$ を求める.

(i) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 1 + 1 = 3$

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3=\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1&\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&-1\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

（2）行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ の逆行列 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1&\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_3\end{pmatrix}$ を求める．

(i) $|A|=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1&\mathbf{a}_2&\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\1&2&1\end{vmatrix}=3+4+1-(3+2+2)=1$

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}|\mathbf{e}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&1\\0&2&1\end{vmatrix}=1\\|\mathbf{a}_1\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&1\\1&0&1\end{vmatrix}=-1\\|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{e}_1|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&0\\1&2&0\end{vmatrix}=1\end{pmatrix}\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}|\mathbf{e}_2\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&3&1\\0&2&1\end{vmatrix}=1\\|\mathbf{a}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0\\|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{e}_2|=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&3&1\\1&2&0\end{vmatrix}=1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3=\begin{pmatrix}|\mathbf{e}_3\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&3&1\\1&2&1\end{vmatrix}=-2\\|\mathbf{a}_1\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1\\|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{e}_3|=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&3&0\\1&2&1\end{vmatrix}=1\end{pmatrix}\quad\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1&\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

9　行列の基本変形と掃き出し法

9.1　行列の基本変形

単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して次の操作によって得られる行列を基本変形の行列とよぶ.

定義 9.1 (基本変形の行列)**.**　(I) E の行の入れ替え $P(ij)$：(E の i 行と j 列の入れ替えた行列)

$$P(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P(13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

特に，$P(12) = P(21),\ P(13) = P(31),\ P(23) = P(32)$

(II) E の行の定数倍 $P(i, c)$：(E の i 行を $c \neq 0$ 倍して得られる行列)

$$P(1, c) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P(2, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P(3, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

(III) E の行の定数倍を他の行に加える $P(i, c\ |j)$：(E の i 行の $c \neq 0$ 倍を j 行に加えて得られる行列)

$$\begin{aligned}
P(1, c\ |2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P(1, c\ |3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P(2, c\ |1) &= \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P(2, c\ |3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \\
P(3, c\ |1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P(3, c\ |2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

定義 9.2. (I),(II),(III) の型の行列を 3 次の基本変形行列という.

基本変形の行列を A に左から乗ずると以下の様な行列になる.

命題 9.1.　基本変形の行列を A に左から乗じた行列.

(I) $P(ij) \cdot A$：A の i 行と j 行を入れ替えて得られる行列

(II) $P(i,c)\cdot A$：A の i 行を c 倍して得られる行列

(III) $P(i,c\,|j)\cdot A$：A の i 行を c 倍して j 行に加えて得られる行列

9.2 基本変形と基本変形行列

行列 A を行ベクトル表示：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix},\ \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

する.

命題 9.2. 行列の基本変形は元の行列に左から基本変形行列を掛けることによって得られる.

(I)

$$P(12)A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_3\end{pmatrix},\ P(13)A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_3\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_1\end{pmatrix},\ P(23)A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_3\\\mathbf{a}_2\end{pmatrix}$$

(II)

$$P_1(c)A=\begin{pmatrix}c\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{pmatrix},\ P_2(c)A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\c\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{pmatrix},\ P_3(c)A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\c\mathbf{a}_3\end{pmatrix}$$

(III)

$$\begin{aligned}P_1(c;2)A&=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\c\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{pmatrix},\ P_1(c;3)A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\c\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3\end{pmatrix}\\P_2(c;1)A&=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1+c\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{pmatrix},\ P_2(c;3)A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\c\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3\end{pmatrix}\\P_3(c;1)A&=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1+c\mathbf{a}_3\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{pmatrix},\ P_3(c;2)A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2+c\mathbf{a}_3\\\mathbf{a}_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

9.3 基本変形と行列式

例. 単位行列の行ベクトル表示

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix},\mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}$$

に対し，(III) 型の基本変形の行列を行ベクトル表示すれば

$$\begin{aligned}
P(1,c\ |2) &= \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\c\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix},\ P(1,c\ |3)=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\c\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3\end{pmatrix}\\
P(2,c\ |1) &= \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1+c\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix},\ P(2,c\ |3)=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\c\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\end{pmatrix}\\
P(3,c\ |1) &= \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1+c\mathbf{e}_3\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix},\ P(3,c\ |2)=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2+c\mathbf{e}_3\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

このとき，容易に $P(ij),\ P(i,c;\ j)\ (i\neq j)$ の行列式について

$$|P(ij)|=-1,\ |P(i,c;\ |j)|=1$$

であることが分かる

このことから,

注意 9.1. 基本変形による行列式の値について次が成り立つ.

(1) A の i-行と j-行を入れ替えた行列の行列式：

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}\quad,\quad\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{a}_3\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_1\end{vmatrix}\quad,\quad\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_3\\\mathbf{a}_2\end{vmatrix}$$

(2) A の i-行を c 倍した行列の行列式：

$$\begin{vmatrix}c\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\c\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\c\mathbf{a}_3\end{vmatrix}=c\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\mathbf{a}_3\end{vmatrix}$$

(3) A の i-行の c 倍を j-列に加えた行列の行列式：

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1+c\mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1+c\mathbf{a}_3\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2+c\mathbf{a}_3\\ \mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ c\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3\end{vmatrix}$$

(4) A の i-行と j-列が同じ行列の行列式：

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_3\\ \mathbf{a}_3\end{vmatrix}=0$$

例題 9.1. (1)

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}\overset{\text{(i),(ii)}}{=}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{vmatrix}=(-3)(-6)\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&1&2\end{vmatrix}=18\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0$$

(i): 1 行の -4 倍を 2 行に加える． (ii)：1 行の -7 倍を 3 行に加える．

(2)

$$\begin{vmatrix}1&3&2\\-4&1&-1\\5&-2&3\end{vmatrix}\overset{\text{(i),(ii)}}{=}\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&13&-9\\0&-17&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13&-9\\-17&13\end{vmatrix}=16$$

(i): 1 行の 4 倍を 2 行に加える． (ii)：1 行の -5 倍を 3 行に加える．

9.4 行列の簡約化

定理 9.1. 3 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ (但し，$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$) は基本変形を適当に繰り返して

（ 基本変形の操作の度に対応する基本変形の行列を左から掛ける)．

最終的には

$$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}1&0&*\\0&1&*\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ E_1=\begin{pmatrix}1&*&*\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&*\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

の何れの行列に変形できる（これを行列の簡約化という)．

タイプ (I),(II),(III) の基本変形の行列全体 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E} = \Big\{P(ij), P(i,c), P(i,c\,|j), 1 \leqq i \neq j \leqq 3\,; c \in \mathbb{R}\Big\}$$

とおく．c は全ての実数を取り得るので $\mathcal{P}$ は集合としては無限集合となる．そのとき，定理より，$\mathcal{E}$ に属する基本変形行列 $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ を適当に選んで A の左から掛けて行くと最終的に

$$P_{i_m}(P_{i_{m-1}}(\cdots(P_{i_2}(P_{i_1} \cdot A)) = E_k \ (k = 3, 2, 1)$$

とできる．そこで，$P = P_{i_m} \cdots P_{i_1}$ とおくと，

$$PA = E_k \ (k = 3, 2, 1)$$

を得る．$PA = E_3 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，P は A の逆行列である．故に，$\underline{A^{-1} = P}$を得る．
この事実を連立１次方程式の解を求める問題や逆行列を求める問題に応用する．

9.5　３元連立１次方程式の掃き出し法による解法

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

の解 $\mathbf{x}$ について，A の行列式 $|A| \neq 0 \Longleftrightarrow A^{-1}$ が存在するとき，上記の様な，いくつかの基本変形の行列の積 P を用いて，$PA = E$ とできる．

$$\therefore A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \therefore \quad P(A\mathbf{x}) = (PA)\mathbf{x} = P\mathbf{b} \quad \therefore \quad E\mathbf{x} = \mathbf{x} = P\mathbf{b} \ (\because PA = E)$$

故に，解は

$$\mathbf{x} = P\mathbf{b} (= A^{-1}\mathbf{b})$$

を得る．

行列 $(A\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & b_3 \end{pmatrix}$ を**拡大係数行列**という．このことは，拡大係数行列 $(A\ \mathbf{b})$ の基本変形操作の繰り返しで

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & b_1^* \\ 0 & 1 & 0 & & b_2^* \\ 0 & 0 & 1 & & b_3^* \end{pmatrix}$$

と変形され，そのときの第４列 $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{pmatrix}$ が求める解である．

これを**掃き出し法**による連立１次方程式の解法という．

例題 9.2. 掃き出し法によって次の連立１次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & ; & 1 \\ 2 & 1 & 3 & ; & 7 \\ 1 & 3 & 1 & ; & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & ; & 1 \\ 2 & 1 & 3 & ; & 7 \\ 1 & 3 & 1 & ; & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}\times(-2)+2\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & ; & 1 \\ 0 & -3 & 1 & ; & 5 \\ 1 & 3 & 1 & ; & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}\times(-1)+3\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & ; & 1 \\ 0 & -3 & 1 & ; & 5 \\ 0 & 1 & 0 & ; & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}\times(-2)+1\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & ; & 3 \\ 0 & -3 & 1 & ; & 5 \\ 0 & 1 & 0 & ; & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{行}\times3+2\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & ; & 3 \\ 0 & 0 & 1 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 0 & ; & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行}\times(-1)+1\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ; & 2 \\ 0 & 1 & 0 & ; & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行と}3\text{行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 0 & 1 & ; & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \underline{x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2}$$

例題 9.3. 掃き出し法によって次の連立１次方程式の解を求めよ．

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & ; & 3 \\ 0 & 1 & 1 & ; & 2 \\ 1 & 0 & 1 & ; & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & ; & 3 \\ 0 & 1 & 1 & ; & 2 \\ 1 & 0 & 1 & ; & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}\times(-1)+1\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & ; & 1 \\ 0 & 1 & 1 & ; & 2 \\ 1 & 0 & 1 & ; & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}\times(-1)+3\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & ; & 1 \\ 0 & 1 & 1 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 2 & ; & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}\div 2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & ; & 1\\ 0 & 1 & 1 & ; & 2\\ 0 & 0 & 1 & ; & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{3\text{行}\times 1+1\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & ; & 1\\ 0 & 1 & 1 & ; & 2\\ 0 & 0 & 1 & ; & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{3\text{行}\times(-1)+2\text{行}}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & ; & 1\\ 0 & 1 & 0 & ; & 2\\ 0 & 0 & 1 & ; & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \underline{x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=0}$$

(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=2\\ 2x_1+x_2-2x_3=1\\ 2x_1-2x_2+x_3=1\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{①\times(-2)+②\&①\times(-2)+③}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -3 & -6 & -3\\ 0 & -6 & -3 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{②\div(-3)\&③\div(-3)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\times(-2)+②\&②\times(-2)+③}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -3 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{③\div(-3)}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\times 2+①\&③\times(-2)+②}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\quad\therefore\quad\begin{pmatrix}x_1\\ \\ x_2\\ \\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\\ \\ \dfrac{1}{3}\\ \\ \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

上記の基本変形の過程で，１行を①, ２行を②, ３行を③とした.

10　掃き出し法による逆行列の求め方

10.1　基本変形による逆行列の求め方

$$AX=E\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{32}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{32}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

を満たす行列 X を A の逆行列とよび, $X=A^{-1}$ にて表す．今, 基本変形の行列を適当な積 $P=P_{i_t}\cdots P_{i_1}$ とり $PA=E$ となったとしよう．このとき，$P=A^{-1}$ である．そのとき，3×6-行列 $(A;E)$ に対し，

$$P(A;E)=(PA;PE)=(E;P)=(E;A^{-1})$$

を得る．従って，3×6-行列 $(A; E)$ が

$$(A; E) \overset{\text{基本変形}}{\to} \cdots \overset{\text{基本変形}}{\to} (E; P)$$

と基本変形の繰り返しで最終的に,

$$A \to E,\ E \to P$$

と変形できたとき，P が A の逆行列である．

即ち，基本変形を繰り返して以下の形に持ってくるのがミソである：

$$(A; E) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ; & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & ; & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ; & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{基本変形の繰り返し}}{\to \cdots \to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ; & x^*_{11} & x^*_{12} & x^*_{13} \\ 0 & 1 & 0 & ; & x^*_{21} & x^*_{22} & x^*_{32} \\ 0 & 0 & 1 & ; & x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{pmatrix}$$

このとき $X^* = \begin{pmatrix} x^*_{11} & x^*_{12} & x^*_{13} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & x^*_{32} \\ x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{pmatrix}$ が求める A の逆行列 A^{-1} である．

例題 10.1. (1) $(A; E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & ; & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & ; & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & ; & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\overset{1\text{行}\times(-2)+2\text{行}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & ; & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & ; & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & ; & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{1\text{行}\times(-1)+3\text{行}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & ; & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & ; & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ; & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3\text{行}\times(-2)+1\text{行}}{\to} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & ; & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & ; & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ; & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{3\text{行}\times 3+2\text{行}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & ; & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & ; & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & ; & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2\text{行}\times(-1)+1\text{行}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ; & 8 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & ; & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & ; & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2\text{行と }3\text{行の入れ替え}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ; & 8 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & ; & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ; & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$(A;E)=\begin{pmatrix}1&3&1&;&1&0&0\\-1&1&2&;&0&1&0\\1&1&1&;&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&;&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{5}{6}\\0&1&0&;&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&;&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

を示せ.

(2)

$$(A;E)=\begin{pmatrix}1&1&-1&;&1&0&0\\2&1&1&;&0&1&0\\3&0&1&;&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&;&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&0&;&\frac{1}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\0&0&1&;&-\frac{3}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

を示せ.

(3)

$$(A;E)=\begin{pmatrix}1&2&3&;&1&0&0\\-2&-3&-4&;&0&1&0\\2&2&4&;&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&;&-2&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0&;&0&-1&-1\\0&0&1&;&1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

を示せ.

(4)

$$(A;E)=\begin{pmatrix}1&3&2&;&1&0&0\\2&6&3&;&0&1&0\\-2&-5&-2&;&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&;&3&-4&-3\\0&1&0&;&-2&2&1\\0&0&1&;&2&-1&0\end{pmatrix}$$

を示せ.

(5)

$$(A;E)=\begin{pmatrix}1&2&2&;&1&0&0\\2&1&2&;&0&1&0\\2&-2&1&;&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&;&-\frac{5}{3}&2&-\frac{2}{3}\\0&1&0&;&-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1&;&2&-2&1\end{pmatrix}$$

を示せ.

（問題３３の解答例）

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&-2&1&0&0&1\end{pmatrix}\overset{(1)}{\to}\begin{pmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-6&-3&-2&0&1\end{pmatrix}\overset{(2)}{\to}\begin{pmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&3&2&2&-1&0\\0&6&3&2&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)}\begin{pmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&3&2&2&-1&0\\0&0&-1&-2&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{(4)}\begin{pmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&3&2&2&-1&0\\0&0&1&2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(5)}\begin{pmatrix}1&2&0&-3&4&-2\\0&3&0&-2&3&-2\\0&0&1&2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(6)}\begin{pmatrix}1&2&0&-3&4&-2\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1&2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(7)}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{3}&2&-\frac{2}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1&2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&-2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&2&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

ここで各操作は以下である：

(1) 1行 $\times(-2)+$ 2行および1行 $\times(-2)+$ 3行　(2) 2行 $\times(-1)$ および3行 $\times(-1)$

(3) 2行 $\times(-2)+$ 3行　(4) 3行 $\times(-1)$　(5) 3行 $\times(-2)+$ 1行および3行 $\times(-2)+$ 2行

(6) 2行 $\times\dfrac{1}{3}$　(7) 2行 $\times(-2)+$ 1行

11　低次元線形代数の問題および例題

問題 1.　[1] $ax=\dfrac{3}{5}$ の解が $x=\dfrac{3}{4}$ のとき $a=$ __________

[2] クラメールの公式（行列式版）を用いて次の連立一次方程式を解け.

(i) $\begin{cases}4x+5y=1\\7x+3y=-4\end{cases}$.　$x=\dfrac{\left|\quad\right|}{\left|\quad\right|}=$　　　　$y=\dfrac{\left|\quad\right|}{\left|\quad\right|}=$

(　,　)

ii) $x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$.　$x=\dfrac{\left|\quad\right|}{\left|\quad\right|}=$　　　　$y=\dfrac{\left|\quad\right|}{\left|\quad\right|}=$

(　,　)

[3] $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．このとき次の行列を成分表示で求めよ．

(i) $AC + BC = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

(ii) $AB + AC = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

(iii) $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

[4] 次の行列の積および行列式の積を求めよ．

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

(ii) $\left| \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right| =$

[5] $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めることにより次の連立一次方程式を解け．

(i) $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

(ii) $A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

例題 1. [1] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ に対し

(1) $AB + AC = A(B + C) = AE = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $(AB + AC)A = A(B + C)A = AEA = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

[2] (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2(a - 5) = 0 \quad \therefore \quad a = 5$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 30 - (-5 - 6 + 4) = -20$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -18 - (-3 + 4) = -19$

[3] クラメールの公式を用いて $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ 7x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$ の解を求めよ.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \\ 10 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 7 & 10 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-31}{-31} = 1,\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 7 & 10 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-62}{-31} = 2, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \\ 7 & -3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-93}{-31} = 3$$

[4] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} について $|A| = 2$ より

(1) A^{-1} の $(1,3)$ 成分 $\Delta_{13} = +\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$

(2) A^{-1} の $(2,3)$ 成分 $\Delta_{23} = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}.$

(a) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

[5] 掃き出し法により $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -8 \\ 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -9 \end{cases}$ の解を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & -8 & 3 & -8 \\ 5 & 2 & 6 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & -13 & 1 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & 16 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 79 & -79 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & 16 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

[6] 掃き出し法により $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -4 & \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

問題 2.　次の問題の解を確認せよ.

(7) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 19 \\ -7 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 31 \end{pmatrix}.$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & a & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad \therefore \quad 5a = 5 \quad \therefore \quad a = 1$

(11) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -8$

(12) クラメールの公式を用いて $\begin{cases} 3x - 4y + 6z = 7 \\ x + 5y - 9z = 4 \\ -2x + y + 3z = -1 \end{cases}$ の解を求めよ.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & -9 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = 3,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & -9 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = 2,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & -9 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = 1 \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(13) 掃き出し法で次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ -2x+y+5z=-9 \\ 3x+2y-z=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & -9 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & -9 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 9 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 25 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 25 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(14) 掃き出し法で次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

12　補遺：工科系向け線形代数 講義ガイド及び補足（中級編）

教科書や講義では紙面や時間的制約からあまり詳しく説明されない内容をできるだけ解り易く，多少の迂遠でかつ無駄な記述も多く散見されるが初学者向けに丁寧に解説したつもりである．知識やテクニックを習得することも重要であるが内容を正確に理解することも数学を応用する場面に出会ったとき役に立つと思う．

12.1　ベクトル再論

12.1.1　数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$

以後は縦ベクトル（列ベクトル）を単にベクトルと呼ぶ．ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ を n 次元**数ベクトル**という．n 次元数ベクトル全体の集合（集まり）

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \ : \ a_1, a_2, \cdots a_n \ \text{は実数} \right\}$$

を n 次元**数ベクトル空間**という．ここで数学記号「$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$」を導入する．これは，$\mathbf{a}$ は $\mathbb{R}^n$ の元（要素）である，即ち，$\mathbf{a}$ は n 次元数ベクトルであることを意味する．故に，

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

今，$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して

(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

(ii) 実数 k に対し，$k\mathbf{a} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots k\mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

と定義する．このとき，

注意 12.1. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 及び実数 k, ℓ に対して $k\mathbf{a} + \ell\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ が成立する．

12.1.2　ベクトルの内積

数ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して，その**内積** $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

で定義する．特に

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

が成立する．

注意 12.2. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対し，$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$ を $\mathbf{a}$ の転置ベクトルとする．ベクトルを行列の特別な場合と解釈すれば，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は $(n, 1)$ 型行列であり，$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ は $(1, n)$ 型行列である．行列の積「$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}$」と内積「$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$」との関係について：

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

補題 12.1. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 及び実数 p, q, s, t に対し

$$\begin{aligned} (p\mathbf{a} + q\mathbf{b}, s\mathbf{a} + t\mathbf{b}) &= (p\mathbf{a}, s\mathbf{a} + t\mathbf{b}) + (q\mathbf{b}, s\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \\ &= (p\mathbf{a}, s\mathbf{a}) + (p\mathbf{a}, t\mathbf{b}) + (q\mathbf{b}, s\mathbf{a}) + (q\mathbf{b}, t\mathbf{b}) \\ &= ps\|\mathbf{a}\|^2 + (pt + qs)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + qt(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{aligned}$$

定義 12.1. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対し $\mathbf{a}$ の**ノルム**（大きさ）$\|\mathbf{a}\|$ を

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n} \ \geqq 0$$

で定義する．

定理 12.1. 数ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して次が成り立つ．

(1) $\|\mathbf{a}\| \geqq 0$ かつ $\|\mathbf{a}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$

(2) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leqq \|\mathbf{a}| + \|\mathbf{b}\|, \quad \Big| \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\| \Big| \leqq \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leqq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$

(3) $\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \geqq \Big|(\mathbf{a}, \mathbf{b})\Big| \quad \therefore \quad -1 \leqq \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \leqq 1$

証明. (3) のみを証明する．任意の（全ての）実数 t に対して

$$0 \leqq \|\mathbf{a} - t\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} - t\mathbf{b}, \mathbf{a} - t\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})t + t^2(\mathbf{b}, \mathbf{b})$$

が成立．これは t に関する 2 次式が，全ての t に対して

$$(\mathbf{b}, \mathbf{b})t^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})t + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqq 0$$

より，判別式

$$D = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \leqq 0 \quad \therefore \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 \leqq 0 \quad \therefore \quad \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \geqq \Big|(\mathbf{a}, \mathbf{b})\Big|$$

特に，等号が成立するのは $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$ の時． □

注意 12.3. 定理 (3) から $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して，

(1) $-1 \leqq \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \leqq 1$ よって $\cos\theta = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$ を満たす $0 \leqq \theta \leqq \pi$ が唯一つ存在する

これは $y = \cos\theta$ に対する中間値の定理である．この θ をベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**なす角**という．

(2) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ の時，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は**直交する**といい，$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ で表す．この時，$\cos\theta = 0$ より $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

(3) $\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|}=\pm 1$ の時，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は**平行**であるといい，$\mathbf{a}//\mathbf{b}$ で表す．この時，

$$\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|}=\begin{cases}1 & \cos\theta=1 \quad \therefore \quad \theta=0\\ -1 & \cos\theta=-1 \quad \therefore \quad \theta=\pi\end{cases}$$

特に，$\mathbf{b}=t\mathbf{a}\ (t\neq 0)$ の時は $\|t\mathbf{b}\|=|t|\|\mathbf{b}\|$ ゆえ，

$$\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|}=\frac{(\mathbf{a},t\mathbf{a})}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|t\mathbf{a}\|}=\frac{t\{\mathbf{a}\|^2}{\|\mathbf{a}\|\cdot|t|\|\mathbf{a}\|^2}=\frac{t}{|t|}=\pm 1 \quad \therefore \quad \mathbf{a}//\mathbf{b}$$

12.1.3 ベクトルの一次独立性および一次従属性

２つの数ベクトルの平行概念の一般化に**一次従属**の概念がある．

定義 12.2. $\mathbf{a}_1=\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ldots,\mathbf{a}_m=\begin{pmatrix}a_{m1}\\a_{m2}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}\ \in\mathbb{R}^n$ に対し，

(1) m 個の数ベクトル $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\ \in\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}$ 上**一次独立**であるとは連立一次方程式

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_m\mathbf{a}_m=\mathbf{0}$$

即ち，

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

または行列表示して

$$(*)\qquad\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1m}\\a_{21}&a_{12}&\ldots&a_{2m}\\&\vdots&&\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\mathbf{0}=\mathbf{0}_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

の（実数）解が $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 以外に解を持たないときをいう．

(2) m 個の数ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}$ 上**一次従属**であるとは，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立でないとき，即ち，連立１次方程式 $(*)$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外に実数解を持つときである．

(3) 実数 $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ に対し $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ の各スカラー積（実数倍）の和：

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$$

を数ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ の $\mathbb{R}$ 上の**一次結合**といい，一次結合全体の集合

$$\left\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \right\rangle_{\mathbb{R}} := \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \ : \ c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ で張られる $\mathbb{R}$-ベクトル空間という．

(4) n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の基底とは，次を満たす n 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ をいう．

(i) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ は一次独立である．

(ii) 任意のベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ の一次結合として表される．即ち，

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2 + \cdots + b_n\mathbf{a}_n$$

を満たす $b_1, b_2, \ldots, b_n$ が存在するときをいう．ここで，$\mathbf{b}$ に対して $b_1, b_2, \ldots, b_n$ は唯一つ定まる（一意性）．要するに

$$\left\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \right\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$$

が成り立つということ．

12.1.4 正規直交系

m 個の単位基本ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $(m \leqq n)$ に対し，その内積について

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

を得る．即ち，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ は互いに直行する単位ベクトルの系（または集合）である．

定義 12.3. $\mathbb{R}^n$ のベクトルの系 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ が**直交系**であるとはこの系に属する異なる 2 つのベクトル $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ $(i \neq j)$ が直交している．即ち $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ $(1 \leqq i \neq j \leqq m)$ ときをいう．更に，各ベクトル $\mathbf{x}_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ が単位ベクトル，即ち，$\|\mathbf{x}_i\| = 1$ であるとき，このベクトルの系を**正規直交系**という．

注意 12.4. $\mathbb{R}^n$ のベクトルの系 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ が直交系ならば，$\overline{\mathbf{x}}_i := \dfrac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_i\|}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ とおくことで, 正規直交系 $\{\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_m\}$ が得られる．但し, $m \leqq n$ であり, $\underline{m > n \text{ ならば直交系になり得ない}}$.

12.1.5 一次独立ベクトル系の直交化

主題： Schmit の直交化法

$m + 1 (\leqq n)$ 個の（零ベクトルを含まない）1 次独立なベクトルの系

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}\} \subset \mathbb{R}^n$$

から正規直交系

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}\} \subset \mathbb{R}^n \text{ ただし } (m \leqq n - 1)$$

を構成せよ．

構成: まず, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}$ は一次独立なので, どの $\mathbf{a}_j$ も残りのベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_{m+1}$ の一次結合では表せないことに注意する.

① $\mathbf{x}_1 := \dfrac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}$. そのとき, $\|\mathbf{x}_1\| = 1$.

② $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{a}_1$ なる $\mathbf{a}_2$ をとり,

$$\mathbf{x}_2' := \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{x}_2'}{\|\mathbf{x}_2'\|}$$

とおくと

$$\|\mathbf{x}_2\| = 1,\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$$

が成り立つ. 故に, 正規直交系 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ が得られる.

実際, $(\mathbf{x}_2', \mathbf{x}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1) - (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1)\|\mathbf{x}_1\|^2 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1) - (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1) = 0 \quad \therefore \quad (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = 0.$

ゆえに $\|\mathbf{x}_2\| = 1,\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \dfrac{1}{|\mathbf{x}_2'\|,}(\mathbf{x}_2', \mathbf{x}_1) = 0$ を得る. □

③ : $\mathbf{a}_3$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の一次結合で表せない. そこで,

$$\mathbf{x}_3' := \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\mathbf{x}_3'}{\|\mathbf{x}_3'\|}$$

とおくと, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ は正規直交系となる. 実際, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ より

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_3', \mathbf{x}_2) &= (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2) - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2)\|\mathbf{x}_2\|^2 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2) - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2) \cdot 1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1) \cdot 0 = 0 \\
(\mathbf{x}_3', \mathbf{x}_1) &= (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1) - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1)\|\mathbf{x}_1\|^2 = (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1) - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_2) \cdot 0 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_1) \cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

$\therefore \quad \|\mathbf{x}_i\| = 1, (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0\ (1 \leqq i \neq j \leqq 3).$

ⓜ : 以下同様に, 正規直交系 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ が構成されたとする. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ は構成から $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$ の一次結合で表されていることに注意すれば $\mathbf{a}_{m+1}$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ の一次結合

では表されない．そこで

$$\mathbf{x}'_{m+1} := \mathbf{a}_{m+1} - (\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{x}_m)\mathbf{x}_m - \cdots - (\mathbf{a}_m, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 - (\mathbf{a}_m, \mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_{m+1} = \frac{\mathbf{x}'_{m+1}}{\|\mathbf{x}'_{m+1}\|}$$

とおく．このとき，$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \begin{cases} +1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$ より，結果的として $(\mathbf{x}'_{m+1}, \mathbf{x}_j) = 0 \ (1 \leqq j \leqq m)$ が分かる．こうして，最終的に正規直交系 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}\}$ が得られる． □

12.2 行列再論

12.2.1 行列の復習及び確認

(1) 行列 A 行の数を m と列の数を n とする．このとき A は (m, n)-型という．$m \times n$-行列ともいう．

(2) 行列 A を構成する数を**成分**という．i-行と j-列に位置する数を (i, j)**-成分**といい，$(A)_{ij}$ で表す．

例えば，(m, n)-型行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

で与えられたとき，$(A)_{ij} = a_{ij}$ となる．また，A の (i, j)-成分 a_{ij} とするとき，

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}$$

と表記することもある．

行列 A, B に対し

$$A = B \iff \begin{cases} A \text{ と } B \text{ の型が等しい} \\ (A)_{ij} = (B)_{ij} \quad \text{（対応する各成分が等しい）} \end{cases}$$

行列 A と B の和 $A+B$ は A,B が同じ型の時のみ定義でき，特に，$A+B$ の型は A,B の型に等しい．一方，行列のスカラー積（定数 c 倍）cA は任意の行列で定義される．

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \quad (c\cdot A)_{ij} = c\cdot (A)_{ij}$$

$M(m,n) = \{(m,n)\text{-型の行列全体の集合}\}$ とする．$A,B \in M(m,n)$, $c\in\mathbb{R}$ に対し

$$\begin{cases} A+B \in M(m,n) \\ \quad c\cdot A \in M(m,n) \end{cases}$$

具体的には,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \color{red}{a_{ij}} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}_1 & \widehat{\mathbf{a}}_2 & \dots & \widehat{\mathbf{a}}_j & \dots & \widehat{\mathbf{a}}_m \end{pmatrix}$$

とおく．但し,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_2 &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_i &= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_m &= \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\widehat{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i2} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \widehat{\mathbf{a}}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \dots, \widehat{\mathbf{a}}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

これらを行列 A の**行ベクトル表示**，**列ベクトル表示**という．

B のベクトル表示 $\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}$ に対し $A+B,\ c\cdot A$ は以下のように表される：

$$A+B = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i+\mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m+\mathbf{b}_m \end{pmatrix}, \quad c\cdot A = c\cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot\mathbf{a}_1 \\ c\cdot\mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ c\cdot\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ c\cdot\mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

行列 A の転置行列 A^{T} とは A の i-行ベクトル $\mathbf{a}_i$ をに転置した列ベクトル $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$ が A^{T} の i-列ベクトルとした行列である，故に，A が (m,n)-型ならば A^{T} は (n,m)-型の行列である．即ち

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{a}_j^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{a}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

但し，$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ こうして

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \dots & \color{red}{a_{ii}} & \dots & \color{red}{a_{ij}} & \dots & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \color{blue}{a_{j1}} & \color{blue}{a_{j2}} & \dots & \color{blue}{a_{ji}} & \dots & \color{blue}{a_{jj}} & \dots & \color{blue}{a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & \color{red}{a_{i1}} & \dots & \color{blue}{a_{j1}} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \color{red}{a_{i2}} & \dots & \color{blue}{a_{j2}} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & \color{red}{a_{ii}} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{mi} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & \color{red}{a_{ij}} & \dots & \color{blue}{a_{jj}} & \dots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \color{red}{a_{in}} & \dots & \color{blue}{a_{jn}} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を得る．特に 同じ型（例えば $(m.n)$ 型）の行列 A, B に対しては

$$(pA + qB)^{\mathrm{T}} = pA^{\mathrm{T}} + qB^{\mathrm{T}}$$

が成り立つ.

正方行列 A, B に対し $A^{\mathrm{T}} = A$ を満たすとき A を**対称行列**といい，$B^{\mathrm{T}} = -B$ を満たすとき B を**交代行列**という．その時, 正方行列 X に対し

$$A = \frac{X + X^{\mathrm{T}}}{2},\ B = \frac{X - X^{\mathrm{T}}}{2}$$

とおくと．$A^{\mathrm{T}} = \left(\dfrac{X + X^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}} = \dfrac{X^{\mathrm{T}} + X}{2} = A, \quad B^{\mathrm{T}} = \left(\dfrac{X - X^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}} = \dfrac{X^{\mathrm{T}} - X}{2} = -B$ なので, A は対称行列であり，B は交代行列である．特に

$$X = A + B = \frac{X + X^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{X - X^{\mathrm{T}}}{2}$$

なので,

命題 12.1. 任意の正方行列 X は対称行列と交代行列の和で表される．

12.2.2　行列の基本変形とベクトル空間の基底

2 つの行列 A, B の積 $A \cdot B$ について

- 積 $A \cdot B$ は A の行の数と B の列の数が一致している場合に限って定義される．即ち，A が (m, n)-型なら B は (n, ℓ)-型で積 $A \cdot B$ は (m, ℓ) 型，標語的にいえば

$$(m, n) \times (n, \ell) = (m, \ell)$$

- $A \cdot B$ の (i, j)-成分 $(A \cdot B)_{ij}$ については

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot (B)_{kj} \quad (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq \ell)$$

  で定義する．但し，$(A)_{ik}$ は A の (i, k)-成分，$(B)_{kj}$ は B の (k, j)-成分である．

実際，成分で表すと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{n\ell} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq \ell}}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_j & \dots & \mathbf{b}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_j & \dots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_\ell \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_j & \dots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_\ell \\ & & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_i\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_i\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_i\mathbf{b}_j & \dots & \mathbf{a}_i\mathbf{b}_\ell \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_i\mathbf{b}_j & \dots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_\ell \end{pmatrix} \text{ となる．}$$

注意 12.5. A を (m,n)-型の行列とする．その時，$m \neq n$ ならば $A^2 = A \cdot A$ は定義されない．

A の冪乗 A^n $(n \geqq 2)$ は A が正方行列のときに限り定義できる．

一般の (m,n)-型行列 A に対して，A の転置行列 A^{T} との積は定義できる．

実際，$A \cdot A^{\mathrm{T}}$ は (m,m)-型，即ち，m 次正方行列となり，$A^{\mathrm{T}} \cdot A$ は (n,n) 型，即ち，n 次正方行列となる．

ここでは正方行列に限って**掃きだし法**の解説を行う．

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_i \\ \vdots \\ \mathbf{e}_j \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

を単位行列の行ベクトル表示とする．

定義 12.4. 次の (I),(II),(III) のタイプの行列を**基本変形行列**という．

(I) $E(i,j) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_j \\ \vdots \\ \mathbf{e}_i \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$: E の i-行と j-行を入れ替えた行列．

(II) $E(i,c) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ c \cdot \mathbf{e}_i \\ \vdots \\ \mathbf{e}_j \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$: E の i-行を c-倍した行列.

(III) $E(i,c;j) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_i \\ \vdots \\ c \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$: E の i-行の c-倍を j-行に加えた行列.

この時，A の行ベクトル表示 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ に対し，次が成り立つ．これを行列 A の行に関する基本変形という．容易に次が成り立つ事を確かめることができる：

$$E(i,j) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \quad E(i,c) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ c \cdot \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}, \quad E(i,c;j) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ c \cdot \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

注意 12.6. 行列 A の基本変形操作（行の入れ替えや定数倍する等の操作）は A に基本変形行列の左からの積によって得られることを示している．

命題 12.2. n 個の n-次元（行）ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ が一次独立ならば行列

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \ldots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

は行に関する基本変形操作を繰り返すことにより単位行列 E に変形される．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{基本変形操作の繰り返し}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

または

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \overset{\text{基本変形操作の繰り返し}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} E = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & e_2 & \ldots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

これを行列 A の**簡易化**という．

注意 12.7. 行列 A 簡易化はタイプ (I),(II),(III) の適当な有限個の基本変形行列の左からの積によって実現された．この 3 つのタイプからなる有限個の基本変形行列達を，あたらめて，$P_1, P_2, \ldots, P_r$ とおく．このとき，$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow E$ は $P := (P_r P_{r-1} \cdots P_1) \cdot A = E$ を意味する．即ち，$PA = E$ が示されたことになる．ゆえに，P は A の逆行列で

$$P = P_r P_{r-1} \cdots P_1 = A^{-1}$$

である．

注意 12.8. 一般の (m,n)-型行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$
但し，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ $(m > n)$，対して，タイプ (I),(II),(III) の基本変形の有限回の繰り返しにより，特別な場合を除き

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_r \quad \text{or} \quad E_n$$

と変形することができる．ここに,

$$E_r = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \dots & 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ & \ddots & & & \vdots & & & & & \\ 0 & & \mathbf{1} & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{1} & * & * & * & * & * \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (r\text{-段}) = \begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$E_n = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & * & * & * \\ & \ddots & & & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & & \mathbf{1} & \dots & 0 & \dots & 0 & * & * & * \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{1} & \dots & 0 & * & * & * \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{1} & * & * & * \end{pmatrix} \qquad (n\text{-段}) = \begin{pmatrix} E_n & * \end{pmatrix}$$

または $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$ と列ベクトル表示したとき，上記の E_r，E_n は列ベクトル表示

$$E_r = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_r & * & * & * & * & * \end{pmatrix}}^{m+n}, \quad E_n = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_r & \dots & \mathbf{e}_n & * & * & * \end{pmatrix}}^{m+n}$$

で表す．

定義 12.5. n-正方行列 A に対して $A \cdot X = X \cdot A = E = E_n$ うを満たす n-次正方行列が存在する時，A は**正則**といい，$X = A^{-1}$ で表し，A の**逆行列**という．逆行列をもつ行列を**正則行列**という．

注意 12.9. 基本変形行列は正則行列である．実際，行列の基本変形操作はその逆操作で元の行列に戻せることから分かる．

注意 12.10. A の逆行列は存在すれば唯一つであることは既に示したので証明は省略する．

行列の基本変形をを通して次を得る．

命題 12.3. n-次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の n-個の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ が一次独立ならばそれらは基底をなす，即ち，

$$\left\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$$

証明. 証明は多少迂遠であるが一つの証明をここに示す．

<u>第１段</u>：

$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}_1 \\ \widehat{\mathbf{a}}_2 \\ \cdots \\ \widehat{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix}$ をそれぞれ行列 A の列ベクトル表示，行ベクトル表示を表すとする．今，A の行に関する基本変形の繰り返しで

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}_1 \\ \widehat{\mathbf{a}}_2 \\ \cdots \\ \widehat{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_r = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_r & * & * & * & * & * \end{pmatrix}}^{m+n}$$

となったとする．これは有限個の基本変形行列の積 P により $PA = E_r$ $(r \leqq n)$, 即ち,

$$PA = P\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \dots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = E_r = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{1\,r+1} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & & & & & \\ 0 & & \mathbf{1} & \dots & 0 & * & \dots & * \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{1} & b_{r\,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

とできる.

<u>第２段</u>：

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ の一次独立性より連立一次方程式

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_b = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \dots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ に限る.

<u>第３段</u>：

$r = n$ であることを背理法で示そう．実際，$r < n$ ならば，$PA = E_r$ より

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow P \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = P \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow (PA) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \therefore \quad E_r \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \quad E_r \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{1\,r+1} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & & & & & \\ 0 & & \mathbf{1} & \dots & 0 & * & \dots & * \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{1} & b_{r\,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x_1 + b_{1\,r+1}x_{r+1} + \cdots b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ x_r + b_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots b_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

$(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ なる $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ を適当に選んで $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ となるようにできる．例えば，E_r の全ての $b_{pq} = 0$ ならば $(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n) = (1, 1, \ldots, 1)$ を選ぶ．この時，$(x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$．これは $\mathbf{x} = 0$ に反し矛盾である．また，$b_{r\,r+1} \neq 0$ ならば $(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n) = (1, 0, \ldots, 0)$ を選べば $(x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ とでき $\mathbf{x} = 0$ に反し矛盾が生じる．以上の考察で $r = n$.

<u>第４段</u>：

第３段に於いて $PA = E_r = E_n = E$ であることが示された．このことは，P は A の逆行列である（即ち，A は正則行列）ことを意味する．よって，連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，唯一つの解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ をもつ．このことは,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

を満たす $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ が存在することを示している．即ち,

$$\mathbf{b} \in \left\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\rangle$$

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ の任意性から結果として

$$\left\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\rangle = \mathbb{R}^n$$

を得る． □

系 1. n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ における n-個の一次独立な（列）ベクトル系 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ を正規直

交化して得られる（列）ベクトル系を $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ とすると

$$\left\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \right\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$$

命題 12.4. 正規直交基底からなる n-次正方行列 $F = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \ldots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix}$ に対し，

$$F^{\mathrm{T}} \cdot F = F \cdot F^{\mathrm{T}} = E$$

が成り立つ．

証明.

$$F^{\mathrm{T}} \cdot F = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{f}_2^{\mathrm{T}} \\ \ldots \\ \mathbf{f}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \ldots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_2 & \ldots & \mathbf{f}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_2 & \ldots & \mathbf{f}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{f}_n^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_n^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_2 & \ldots & \mathbf{f}_n^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 & \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす．実際，$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ は正規直交系なので内積の定義から

$$\mathbf{f}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_j = (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

なので

その時,

$$\left(F^{\mathrm{T}} \cdot F\right)^{\mathrm{T}} = F^{\mathrm{T}} \cdot (F^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = F \cdot F^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} = E$$

ゆえに,

$$F \cdot F^{\mathrm{T}} = F^{\mathrm{T}} \cdot F = E, \quad F^{-1} = F^{\mathrm{T}}$$

これを満たす正方行列 F を**直交行列**という．

特に，直交行列 F に対しては，$F^{\mathrm{T}} \cdot F = E$ より，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$(F\mathbf{x}, F\mathbf{y}) = (F\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \cdot F\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \left(F^{\mathrm{T}}\right) \cdot F\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot (F^{\mathrm{T}} \cdot F) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\therefore \quad (F\mathbf{x}, F\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

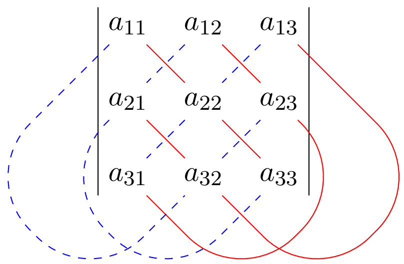
12.3　行列式再論

12.3.1　３次行列式再論

サラスの公式の復習から始める．

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}} - \underline{\underline{(\ a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})}}$$

$$\|$$



前半の $(+)$ の項 $\mathrm{I} =: \underline{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}}$: 第２の index; $(123), (312), (231)$

後半の $(-)$ の項 $\mathrm{II} := \underline{\underline{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}}}$: 第２の index; $(321), (132), (213$

そこで,

$$S_3^+ = \{(123), (312), (231)\}, \quad S_3^- = \{(321), (132), (213)\}, \quad S_3 = S_3^+ \cup S_3^-$$

とおく．但し，$S_3^+ \cap S_3^- = \emptyset$．こうして

$$S_3 = \{(123), (312), (231),\ (321), (132), (213)\}$$

そこで．第１項及び第２項をそれぞれ

$$\mathrm{I} = \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in S_3^+} a_1 i_1 \cdot a_2 i_2 \cdot a_3 i_3 \quad , \quad \mathrm{II} = (-1) \cdot \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in S_3^-} a_1 i_1 \cdot a_2 i_2 \cdot a_3 i_3$$

とおく．

(i) S_3^+ の３つ組み (i_1, i_2, i_3) は２つの文字の偶数回の入れ替えで入れで (123) の並び（順列）に持ってこれる組み（0 回は偶数回と見做す）．例えば

$$(312) \underset{3\leftrightarrow 1}{\to} (132) \underset{2\leftrightarrow 3}{\to} (123) \quad \therefore \quad (312) \in S_3^+$$

(ii) S_3^- の３つ組み (j_1, j_2, j_3) は２つの文字の奇数回の入れ替えで (123) の並び（順列）に持ってこれる組み.

$$(321) \underset{3\leftrightarrow 1}{\to} (123) \quad \therefore \quad (321) \in S_3^-$$

こうして,

$$(*)_3 \quad |A| = \mathrm{I} + \mathrm{II} = \sum_{(i_1,i_2,i_3)\in S_3} sgn(i_1, i_2, i_3) \cdot a_{1\,i_1} a_{2\,i_2} a_{3\,i_3}$$

と表される．但し,

$$\mathrm{s}gn(i_1, i_2, i_3) = \begin{cases} +1 & \text{if} \quad (i_1, i_2, i_3) \in S_3^+ \\ -1 & \text{if} \quad (i_1, i_2, i_3) \in S_3^- \end{cases}$$

３次の行列式 (8)-$(*)_3$ の n-次元版のために新たな言葉と記号を導入する.

I 及び II の和の各項についてその二重指数の部分に着目する：

$$\mathrm{I}:\ 11\,22\,33 \quad 13\,21\,32 \quad 12\,23\,31 \qquad \mathrm{II}:\ 13\,22\,31 \quad 11\,23\,32 \quad 12\,21\,33$$

これを次のように書き換える：

$$11\,22\,33 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 13\,21\,32 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad 12\,23\,31 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$13\,22\,31 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 11\,23\,32 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad 12\,21\,33 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

注意 12.11. (1) 上段の１２３の並び順は重要ではなく，上段の１２３に対応する下段の数が重要である.

(2) 1 2 3 を上段・下段に並べた組み $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$ を 3 文字の**置換**という．ここに，$i_1\ i_2\ i_3$ は

1 2 3 の順列である

(3) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$ は集合 $\{1,2,3\}$ から集合 $\{1,2,3\}$ への 1 対 1 の写像

$$\sigma : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} \quad \text{または} \quad \{1,2,3\} \xrightarrow{\sigma} \{1,2,3\}$$

と見做せ,，σ の像は $\begin{cases} \sigma(1) = i_1 \\ s(2) = i_2 \\ \sigma(3) = i_3 \end{cases}$ とおくと，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix}$$

と表すことができる．$\mathrm{s}gn(\sigma) = \mathrm{s}gn(i_1\ i_2\ i_3)$ に注意すれば最終的に

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in S_3^+} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} - \sum_{\sigma \in S_3^-} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= \sum_{(i_1,i_2,i_3) \in S_3} \mathrm{s}gn(i_1, i_2, i_3) \cdot a_{1\,i_1} a_{2\,i_2} a_{3\,i_3} \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{s}gn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \end{aligned}$$

を得る．

12.3.2 置換

n-文字 1 2 $\ldots$ n の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \ ; \quad \sigma(k) = i_k\ (1 \leqq k \leqq n)$$

全体の集合を S_n で表す．このとき，S_n の要素の数 $|S_n|$ は n 文字 $\{1,\ 2,\ \ldots, n\}$ の順列の数なので，

$$|S_n| = n!$$

(i) 上段と下段の数が同じ置換

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix}$$

を**単位置換**という．

(ii) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_i & \dots & k_j & \dots & n \end{pmatrix}$ に於いて上段はそのままで下段の i 番目と j 番目だけを入れ替えた置換

$$(k_i, k_j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_j & \dots & k_i & \dots & n \end{pmatrix}$$

互換という．

(iii) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ は互換を繰り返すことによって最終的に単位置換に変換される．

例.

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ (1\ 4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ (1\ 4)(2\ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ (1\ 4)(2\ 3)(3\ 5) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ (1\ 2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ (1\ 2)(4\ 5) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \epsilon \end{aligned}$$

偶数回の互換で単位置換に変換されるとき**偶置換**といい，奇数回の互換で単位置換に変換されるとき**奇置換**という．置換の**符号** $sgn(\sigma)$ を次のように定義する：

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ は偶置換} \\ -1 & \sigma \text{ は奇置換} \end{cases}$$

で定義する．上の例では σ は奇置換（3回の置換）であり τ は偶置換（2回の置換）である，即ち，

$$\therefore \quad sgn(\sigma) = -1, \quad sgn(\tau) = +1$$

注意 12.12. 最初の互換を $(i_1\ j_1)$, 2 回目の互換を $(i_2\ j_2)$,k 回目の互換を $(\imath_k\ j_k)$ とするとき，k 回の互換の繰り返しを

$$(i_1\ j_1)(i_2\ j_2)\dots(\imath_k\ j_k)$$

と表す．こうして，置換 σ が k 回互換で単位置換に変換された，即ち，

$$\sigma \to (i_1\ j_1) \to (i_1\ j_1)(i_2\ j_2) \to \cdots \to (i_1\ j_1)(i_2\ j_2)\dots(\imath_k\ j_k) = \epsilon$$

のとき，

$$\mathrm{s}gn(\sigma) = (-1)^k$$

を得る．

命題 12.5. 置換 σ を互換の繰り返しで単位置換に変換する方法は一通りではないが，その互換の回数の偶奇性（偶数か奇数か）は σ に対して唯一つ決まる．

注意 12.13. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ を互換の繰り返しで単位置換に変換する一つの方法は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{互換}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{互換}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & * \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ このように，上段の数と合致するように下段の文字の入れ替え（互換）を行なってゆけば最終的に単一考えられる．

そこで，$S_n^+ = \left\{\sigma \in S_n \ :\ \sigma \quad \text{は偶置換}\right\}$, $\quad S_n^- = \left\{\sigma \in S_n \ :\ \sigma \quad \text{は奇置換}\right\}$ とおくと，

$$S_n := S_n^+ \cup S_n^{-1}, \quad S_n^+ \cap S_n^- = \emptyset \quad \therefore \quad |S_n^+| = |S_n^-| = \frac{n!}{2}$$

を得る．

注意 12.14. 置換の上段の数の並び順は重要ではない．上段の数の下に位置する下段の数が重要．実際，左辺は右辺のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

例題 12.1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{1\leftrightarrow 3}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{2\leftrightarrow 5}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$: 2 回の互換で単位置換に変換された．

$$(1\ 3)(2\ 5) = \epsilon \quad \therefore \quad sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = +1$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \underset{2\leftrightarrow 1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \underset{4\leftrightarrow 2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \underset{5\leftrightarrow 4}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$: 3 回の互換で単位置換に変換された．

$$(2\ 1)(4\ 2)(5\ 4) = \epsilon \quad \therefore \quad sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

(iv) 置換 $\sigma,\ \tau \in S_n$ に対して，その積 $\sigma \cdot \tau \in S_n$ を

$$(\sigma \cdot \tau)(i) = \tau(\sigma(i))\ (1 \leqq i \leqq n)$$

即ち，置換の積 $\sigma \cdot \tau$ は写像の合成 $\tau \circ \sigma$ として定義する．即ち，$\sigma \cdot \tau = \tau \circ \sigma$ と定義する．ここで，積と合成ではその順が逆になっていることに注意する．

$$\tau \circ \sigma :\ \{1,\ 2,\ \ldots, i,\ \ldots,\ n\} \xrightarrow{\sigma} \{1,\ 2,\ \ldots, i,\ \ldots,\ n\} \xrightarrow{\tau} \{1,\ 2,\ \ldots, i,\ \ldots,\ n\}$$

注意 12.15. 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

に対し置換 τ の上段 $1\ 2\ \ldots\ n$ を $\sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n)$ と並べ替える．そのとき，並び替えた各 $\sigma(i)$ に対応する元々の τ の値が $\tau(\sigma(i)) = \sigma \cdot \tau(i)$ である．

命題 12.6. $sgn(\sigma\cdot\tau)=sgn(\sigma)\cdot sgn(\tau)$

(v) $\sigma\cdot\tau=\epsilon$ を満たす置換 τ を置換 σ の逆置換といい，σ^{-1} で表す．こうして，

$$\sigma\cdot\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\cdot\sigma=\epsilon$$

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\dots&i&\dots&n\\k_1&k_2&\dots&k_i&\dots&n\end{pmatrix}\Longrightarrow\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}k_1&k_2&\dots&k_i&\dots&k_n\\1&2&\dots&i&\dots&n\end{pmatrix}$$

置換としては上段の $k_1\ k_2\ \dots\ k_i\ \dots\ k_n$ を小さい順（1，2，$\dots,n$ の順）に並べ替えることによって

$$\begin{pmatrix}k_1&k_2&\dots&k_i&\dots&k_n\\1&2&\dots&i&\dots&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\dots&i&\dots&n\\\sigma^{-1}(1)&\sigma^{-1}(2)&\dots&\sigma^{-1}(i)&\dots&\sigma^{-1}(n)\end{pmatrix}$$

を得る．特に．$sgn(\sigma\cdot\sigma^{-1})=sgn(\epsilon)=+1\quad\therefore\quad sgn(\sigma\cdot\sigma^{-1})=sgn(\sigma)\cdot sgn(\sigma^{-1})=+1$．こうして $sgn(\sigma)=\pm1$ と $sgn(\sigma^{-1})=\pm1$.

$$\therefore\quad sgn(\sigma^{-1})=sgn(\sigma)$$

が成り立つ.

12.3.3 行列式の性質

n 次正方行列 A の行列式 $|A|$ を

$$(*)_n\quad|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{(i_1\ i_2\ \dots\ i_n)\in S_n}sgn\begin{pmatrix}i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

で定義する．これは $(*)_3$ の n 次元版である．特に，$n=3$ ならば $(*)_3$ を得る．さらに，簡単のため

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\\sigma(1)&\sigma(2)&\dots&\sigma(2)\end{pmatrix},$$

即ち，　$i_1 = \sigma(1), i_2 = \sigma(2), \ldots i_n = \sigma(n)$．このとき，$(*)_n$ は次のように表される．

$$(*)_n \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

一方的，行列の基本変形とその行列式の関係を示すために行列式を列ベクトル表示する．このとき，

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_i & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

を得る．

命題 12.7. A の転置行列を A^{T} とする．このとき，$|A| = |A^{\mathrm{T}}|$.

証明.

$$|A^{\mathrm{T}}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

とおく．このとき，$b_{ij} = a_{ji}$, i.e. $b_{i\,\sigma(i)} = a_{\sigma(i)\,i}$ ゆえ，

$$|A^{\mathrm{T}}| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{n\sigma(n)} = \sum \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

が得られる．ここに，$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ は集合として $\{1, 2, \ldots, n\}$ と一致している．

そこで，$\sigma(1)\,\sigma(2)\,\ldots\,\sigma(n)$ を 1 から小さい順に n まで並べ直す：

$$\underline{\sigma(1)\,\sigma(2)\,\ldots\ldots\,\sigma(n)} \longrightarrow \underline{\sigma(k_1)\,\sigma(k_2)\,\ldots\,\sigma(k_n)} \;=\; \underline{1\,2\,\ldots\;n}$$

即ち，$\sigma(1)\,\sigma(2)\,\ldots\,\sigma(n)$ の並びの中には 1 があり，それを $\sigma(k_1)$ とし，以下，

$$\sigma(k_1) = 1, \ldots, \sigma(k_2), \ldots \sigma(k_n) = n$$

とする．これは順列としては（書き直しなので）

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k_1) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & k_1 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

であり，$\sigma\colon \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$ は写像として１対１なので

$$k_1 = \sigma^{-1}(1), k_2 = \sigma^{-1}(2), , \dots, k_n = \sigma^{-1}(n)$$

$$\therefore \quad a_{\sigma(1)\,1}a_{\sigma(2)\,2}\cdots a_{\sigma(n)\,n} = a_{1\,k_1}a_{2\,k_2}\cdots a_{n\,k_n} = a_{1\,\sigma^{-1}(1)}a_{2\,\sigma^{-1}}\cdots a_{n\,\sigma^{-1}(n)}$$

$$\therefore \quad \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{s}gn(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = \sum \mathrm{s}gn(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$\mathrm{s}gn(\sigma) = \mathrm{s}gn(\sigma^{-1})$ ゆえ，最終的に

$$|A^{\mathrm{T}}| = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \mathrm{s}gn(\sigma^{-1})\, a_{1\,\sigma^{-1}(1)}a_{2\,\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\,\sigma^{-1}(n)} = |A|$$

を得る．

実際，$\{\sigma^{-1} \ : \ \sigma \in S_n\} = S_n \Longleftrightarrow \sigma^{-1}S_n = S_n$ より $\tau = \sigma^{-1}$ とおくと，

$$|A^{\mathrm{T}}| = \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{s}gn(\tau)\, a_{1\,\tau(1)}a_{2\,\tau(2)}\cdots a_{n\,\tau(n)} = |A|$$

□

次に $\sigma \in S_n$ に対し

$$|A^\sigma| = \begin{vmatrix} a_{1\,\sigma(1)} & a_{1\,\sigma(2)} & \cdots & a_{1\,\sigma(n)} \\ a_{2\,\sigma(1)} & a_{2\,\sigma(2)} & \cdots & a_{2\,\sigma(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n\,\sigma(1)} & a_{2\,\sigma(2)} & \cdots & a_{n\,\sigma(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widehat{a}_{\sigma(1)} & \widehat{a}_{\sigma(2)} & \dots & \widehat{a}_{\sigma(n)} \end{vmatrix}$$

と A^σ を列ベクトル表示する．

命題 12.8. $|A^\sigma| = \begin{vmatrix} \widehat{a}_{\sigma(1)} & \widehat{a}_{\sigma(2)} & \dots & \widehat{a}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} = \mathrm{s}gn(\sigma)\cdot \begin{vmatrix} \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & \dots & \widehat{a}_n \end{vmatrix} = \mathrm{s}gn(\sigma)\cdot|A|$

証明.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}\widehat{a}_{\sigma(1)} & \widehat{a}_{\sigma(2)} & \dots & \widehat{a}_{\sigma(n)}\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{1\,\sigma(1)} & a_{1\,\sigma(2)} & \dots & a_{1\,\sigma(n)} \\ a_{2\,\sigma(1)} & a_{2\,\sigma(2)} & \dots & a_{2\,\sigma(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n\,\sigma(1)} & a_{2\,\sigma(2)} & \dots & a_{n\,\sigma(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\tau\in S_n} sgn(\tau)\ b_{1\,\tau(1)}\cdot b_{2\,\tau(2)}\cdots b_{n\,\tau(n)} \\
&= \sum_{\tau\in S_n} sgn(\tau)\ a_{1\,\tau(\sigma(1))}\cdot a_{2\,\tau(\sigma(2))}\cdots a_{n\,\tau(\sigma(n))} \quad (\because \quad b_{i\,j} = a_{i\,\sigma(j)}) \\
&= \sum_{\tau\in S_n} sgn(\tau)\ a_{1\ \sigma\cdot\tau(1)}\cdot a_{2\ \sigma\cdot\tau(2)}\cdots a_{n\ \sigma\cdot\tau(n)} \quad (\because \quad \sigma\cdot\tau = \tau\circ\sigma) \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{\sigma\tau\in S_n} sgn(\tau)\ a_{1\ \sigma\cdot\tau(1)}\cdot a_{2\ \sigma\cdot\tau(2)}\cdots a_{n\ \sigma\cdot\tau(n)} \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot|A| = sgn(\sigma)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad |A^\sigma| = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot|A|$$

命題 12.9. $|A_\sigma| = \begin{vmatrix} a_{\sigma(1)\,1} & a_{\sigma(1)\,2} & \dots & a_{\sigma(1)\,n} \\ a_{\sigma(2)\,1} & a_{\sigma(2)\,2} & \dots & a_{\sigma(2)\,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{\sigma(n)\,1} & a_{\sigma(n)\,2} & \dots & a_{\sigma(n)\,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{a}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{\sigma(n)}\end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\sigma)\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\sigma)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

証明.

$$|A_\sigma| = \begin{vmatrix} a_{\sigma(1)\,1} & a_{\sigma(1)\,2} & \dots & a_{\sigma(1)\,n} \\ a_{\sigma(2)\,1} & a_{\sigma(2)\,2} & \dots & a_{\sigma(2)\,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{\sigma(n)\,1} & a_{\sigma(n)\,2} & \dots & a_{\sigma(n)\,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{a}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{\sigma(n)}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

とおく．そのとき，$b_{ij} = a_{\sigma(i)\,j} \quad (1 \leqq i, j \leqq n)$ なので

$$
\begin{aligned}
|A_\sigma| &= sgn(\tau) \sum_{\tau\in S_n} b_{1\,\tau(1)} b_{2\,\tau(2)}\cdots b_{n\,\tau(n)} \\
&= sgn(\tau) \sum_{\tau\in S_n} a_{\sigma(1)\,\tau(1)} a_{\sigma(2)\,\tau(2)}\cdots a_{\sigma(n)\,\tau(n)}
\end{aligned}
$$

$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$ は集合として $\{1, 2, \dots, n\}$ と一致しているので，どれかの k に対し $\sigma(k) = 1$ と

なる．故に $\begin{cases} 1 = \sigma(k_1) & \therefore \quad k_1 = \sigma^{-1}(1) \\ 2 = \sigma(k_2) & \therefore \quad k_2 = \sigma^{-1}(2) \\ \vdots & \\ n = \sigma(k_n) & \therefore \quad k_n = \sigma^{-1}(n) \end{cases}$ なる $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ が存在する．

積の順番を入れ替えて

$$\begin{aligned}
|A_\sigma| &= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{s}gn(\tau)\, a_{\sigma(1)\,\tau(1)} a_{\sigma(2)\,\tau(2)} \ \cdots \ a_{\sigma(n)\,\tau(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{s}gn(\tau)\, a_{\sigma(k_1)\,\tau(k_1)} a_{\sigma(k_2)\,\tau(k_2)} \ \cdots \ a_{\sigma(k_n)\,\tau(k_n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{s}gn(\tau)\, a_{1\,\tau(\sigma^{-1}(1))} a_{2\,\tau(\sigma^{-1}(2))} \ \cdots \ a_{n\,\tau(\sigma^{-1}(n))} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{s}gn(\tau)\, a_{1\,\sigma^{-1}\cdot\tau(1)} a_{2\,\sigma^{-1}\cdot\tau(2)} \ \cdots \ a_{n\,\sigma^{-1}\cdot\tau(n)} \\
&= \mathrm{s}gn(\sigma^{-1}) \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{s}gn(\sigma^{-1}\tau)\, a_{1\,(\sigma^{-1}\cdot\tau)(1)} a_{2\,(\sigma^{-1}\cdot\tau)(2)} \therefore\because a_{n\,(\sigma^{-1}\cdot\tau)(n)} \\
&= \mathrm{s}gn(\sigma) \sum_{\sigma^{-1}\tau \in S_n} \mathrm{s}gn(\sigma^{-1}\tau)\, a_{1\,(\sigma^{-1}\cdot\tau)(1)} a_{2\,(\sigma^{-1}\cdot\tau)(2)} \therefore\because a_{n\,(\sigma^{-1}\cdot\tau)(n)} \\
&= \mathrm{s}gn(\sigma) \cdot |A|
\end{aligned}$$

$$\because \quad \mathrm{s}gn(\tau) = (\mathrm{s}gn(\sigma^{-1})^2\, \mathrm{s}gn(\tau) = \sin(\sigma^{-1}) \cdot \mathrm{s}gn(\sigma^{-1}) \cdot (\mathrm{s}gn(\tau) = sin(\sigma^{-1}) \cdot \mathrm{s}gn(\sigma^{-1} \cdot \tau)$$

$$\mathrm{s}gn(\sigma^{-1}) = \mathrm{s}gn(\sigma) \quad \therefore \quad \mathrm{s}gn(\tau) = \mathrm{s}gn(\sigma) \cdot \mathrm{s}gn(\sigma^{-1} \cdot \tau)$$

$$\{\sigma^{-1}\tau \ : \ \tau \in S_n\} = \sigma^{-1} \cdot S_n = S_n$$

$$\therefore \quad |A_\sigma| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{a}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} = \mathrm{s}gn(\sigma) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{a}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} = \mathrm{s}gn(\sigma) \cdot |A|$$

または，$|A^{\mathrm{T}}| = |A|$ となる事実を用いた以下の別証明もある．

$$
\begin{aligned}
|A_\sigma| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{a}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} &= \left| \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{a}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{\sigma(n)} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}^T_{\sigma(1)} & \mathbf{a}^{\mathrm{T}}_{\sigma(2)} & \ldots & \mathbf{a}^{\mathrm{T}}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{\sigma(1)} & \mathbf{b}_{\sigma(2)} & \ldots & \mathbf{b}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} \text{ とおく．但し，} \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j^{\mathrm{T}} \ (1 \leqq j \leqq n) \\
&= \mathrm{s}gn(\sigma) \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_n \end{vmatrix} = \mathrm{s}gn(\sigma) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{a}_n^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} \\
&= \mathrm{s}gn(\sigma) \left| \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right| = \mathrm{s}gn(\sigma) \ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \mathrm{s}gn(\sigma) \ |A|
\end{aligned}
$$

$\square$

系 2. 行列式において i 行と j 行を入れ替える．

$$
\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \mathrm{s}gn\,(i, j) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}
$$

特に，$i < j$ に対し，i 行と j 行が同じ（又は，i 列と j 列が同じ）即ち，$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$（または $\hat{\mathbf{a}}_i = \hat{\mathbf{a}}_j$ のとき，その行列式の値は零である，即ち，

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \dots & \color{red}{a_{in}} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \dots & \color{red}{a_{in}} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & \color{blue}{a_{1i}} & \dots & \color{blue}{a_{1i}} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & \color{blue}{a_{2i}} & \dots & \color{blue}{a_{2i}} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & \color{blue}{a_{ni}} & \dots & \color{blue}{a_{ni}} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= 0
$$

または

$$
\begin{vmatrix}
\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \color{red}{\mathbf{a}_i} \\ \vdots \\ \color{red}{\mathbf{a}_i} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \color{blue}{\mathbf{a}_i} & \dots & \color{blue}{\mathbf{a}_i} & \dots & \mathbf{a}_n
\end{vmatrix}
= 0.
$$

実際，系 3 より

$$
\begin{vmatrix}
\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n
\end{vmatrix}
\quad , \quad
\begin{vmatrix}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \color{blue}{\mathbf{a}_i} & \dots & \color{blue}{\mathbf{a}_i} & \dots & \mathbf{a}_n
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \color{blue}{\mathbf{a}_i} & \dots & \color{blue}{\mathbf{a}_i} & \dots & \mathbf{a}_n
\end{vmatrix}
$$

$$
\therefore \quad
\begin{vmatrix}
\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \color{blue}{\mathbf{a}_i} & \dots & \color{blue}{\mathbf{a}_i} & \dots & \mathbf{a}_n
\end{vmatrix}
= 0
$$

命題 12.10 (行列式の行-線形性)**.**

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

□

証明.

$$
\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots (a_{i\,\sigma(i)} + b_{i\,\sigma(i)}) \cdots a_{n\,\sigma(n)}
$$

$$
= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{i\,\sigma(i)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots b_{i\,\sigma(i)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}
$$

□

系 3 (行列式の列-線形性について)**.**

$$
\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i & \dots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_i & \dots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{b}_i & \dots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}
$$

証明. $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$ を適用する.

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_i+\mathbf{b}_i & \dots & \mathbf{a}_n\end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_i+\mathbf{b}_i & \dots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right| = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}+\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{\mathrm{T}}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{\mathrm{T}}\end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_i & \dots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right| + \left|\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{b}_i & \dots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right|$$

$$= \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_i & \dots & \mathbf{a}_n\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{b}_i & \dots & \mathbf{a}_n\end{vmatrix}$$

□

12.3.4 行列の基本変形と行列式

行列式の性質から次が分かる.

命題 12.11.

$$(\mathrm{I}):\ \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\end{vmatrix},\quad (\mathrm{II}):\ \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ c\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\end{vmatrix} = c\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\end{vmatrix},\quad (\mathrm{III}):\ \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + c\,\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\end{vmatrix}$$

命題 12.12.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}D_{11}$$

但し，D_{ij} は行列の i-行及び j-列を除いた残り $n-1$ 次正方行列の行列式.

証明. 与えられた行列式は $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$ において１列目の２行以下

$$a_{21} = a_{31} = \dots a_{n1} = 0$$

としたものである．$\sigma(k) = 1$ となる k があれば $a_{k\,\sigma(k)} = a_{k\,1} = 0$ より

$$a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} = 0$$

よって $\sigma(2) \neq 1, \sigma(3) \neq 1, \dots, \sigma(n) \neq 1$ となる全ての $\sigma \in S_n$ に対して

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$$

を取れば良い.

$$\{\sigma \in S_n \ : \ \sigma(2) \neq 1, \sigma(3) \neq 1, \dots, \sigma(n) \neq 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \ \middle| \ \tau = \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_{n-1} \right\}$$

ここに，集合として $\{i_2 \ i_3 \ \dots \ i_n\} = \{2 \ 3 \ \dots \ n\}$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} &= a_{11} \sum_{\tau \in S_{n-1}} sgn(\tau) \ a_{2\,\tau(2)} a_{3\,\tau(3)} \dots a_{n\,\tau(n)} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} D_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{j-1\,2} & \dots & a_{j-1\,n} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ 0 & a_{j+1\,2} & \dots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{j-1\,2} & \dots & a_{j-1\,n} \\ 0 & a_{j+1\,2} & \dots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} a_{j1} D_{j1} = a_{j1} \cdot (-1)^{j+1} D_{j1} = a_{j1}\Delta_{j1}$$

但し，$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$（$(i, j)$-余因子）とおく．列の線形性を繰り返し用いて行列式の 1-列展開：

$$(*) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{j-1\,1} & a_{j-1\,2} & \dots & a_{j-1\,n} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{j+1\,1} & a_{j+1\,2} & \dots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{j-1\,2} & \dots & a_{j-1\,n} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ 0 & a_{j+1\,2} & \dots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{j-1\,2} & \dots & a_{j-1\,n} \\ 0 & a_{j+1\,2} & \dots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{j1} D_{j1} = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \cdot (-1)^{j+1} D_{j1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{j1}\Delta_{j1} = a_{11}\Delta_{11} + a_{21}\Delta_{21} + \cdots + a_{n1}\Delta_{n1}$$

を得る．

j 列展開について：j 列と $j-1$ 列を入れ替えた行列式の $j-1$ 列と $j-2$ 列を入れ替える，以下順に

入れ替えて j 列を 1 列に移動させると，結果，$j-1$ 回の列の入れ替えなので，

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1j} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2j} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i\,j-1} & a_{ij} & a_{i\,j+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{nj} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{j-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & & \\ a_{ij} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i\,j-1} & a_{i\,j+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & & \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．行列式の 1 列展開公式 $(*)$ にを当てはめて $j \quad (1 \leqq j \leqq n)$ 列展開公式

$$
\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{j-1}\Big(a_{1j}D_{1j} - a_{2j}D_{2j} + a_{3j}D_{3j} + \dots + (-1)^{i-1}a_{ij}D_{ij} + \dots + (-1)^{n-1}a_{nj}D_{nj}\Big) \\
&= (-1)^{j-1}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{j}a_{2j}D_{2j} + (-1)^{j-1}a_{3j}D_{3j} + \dots + (-1)^{j-1+i-1}a_{ij}D_{ij} + \cdots \\
\cdots &\quad \dots + (-1)^{j-1+n-1}a_{nj}D_{nj} \\
&= (-1)^{j+1}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{j+2}a_{2j}D_{2j} + \dots + (-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij} + \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{nj} \\
&= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots a_{ij}\Delta_{ij} + \dots + a_{nj}\Delta_{nj}
\end{aligned}
$$

を得る．一方，行列 A の j 列 $\widetilde{a}_j$ と ℓ 列 $\widetilde{a}_\ell$ が同じ場合は $|A| = 0$ であった．今，A の ℓ 列展開

$$
(*) \quad |A| = a_{1\ell}\Delta_{1j} + a_{2\ell}\Delta_{2j} + \cdots a_{i\ell}\Delta_{i\ell} + \dots + a_{n\ell}\Delta_{n\ell}
$$

において ℓ 列 $\widetilde{a}_\ell$ を j 列 $\widetilde{a}_j$ で置き換え，ℓ 列展開する．そのとき，$|A| = 0$ であり，$\widetilde{a}_j = \widetilde{a}_\ell$ なので上記公式 $(*)$ において，

$$
a_{1\ell} = a_{1j},\ a_{2\ell} = a_{2j}, \dots, a_{n\ell} = a_{nj}
$$

と置き換えれば良い．こうして

$$0 = |A| = |A| = a_{1\mathrm{j}}\Delta_{1\ell} + a_{2j}\Delta_{2\ell} + \cdots a_{ij}\Delta_{i\ell} + \cdots + a_{nj}\Delta_{n\ell} \quad (j \neq \ell)$$

以上より

命題 12.13.

$$a_{1\mathrm{j}}\Delta_{1\ell} + a_{2j}\Delta_{2\ell} + \cdots a_{ij}\Delta_{i\ell} + \cdots + a_{nj}\Delta_{n\ell} = \begin{cases} |A| & \text{if} \quad j = \ell \\ 0 & \text{if} \quad j \neq \ell \end{cases}$$

言い換えれば

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta 21 & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta 22 & \dots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta 2n & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta 21 & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta 22 & \dots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta 2n & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \\ &= |A| \cdot E = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注意 12.16.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta 21 & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta 22 & \dots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta 2n & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の**随伴行列**（adjoint）という．このとき，

$$A \cdot \widetilde{A} = |A| \cdot E$$

従って，$|A| \neq 0$ ならば $A\left(\dfrac{\widetilde{A}}{|A|}\right) = E$ より，逆行列の定義から A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{|A|}$$

で与えられる．

命題 12.14. 正方行列 A, B に対して

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

特に，$|A \cdot B \cdot C| = |A(BC)| = |(AB)C| = |(AB)|\,|C| = (|A|\,|B|)\,|C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$

証明. n 次行列 $X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$（列ベクトル表示）に対し

$$F(X) := F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \begin{vmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \dots & A\mathbf{x}_n \end{vmatrix} \quad (AX \text{ の行列式})$$

行列 A の線形性及び行列式の各列に関する列-線形性（多重線形性という）から

$$\begin{cases} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i, \dots, \mathbf{x}_n) = F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n) + F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{y}_i, \dots, \mathbf{x}_n) \ (1 \leqq i \leqq n) \\ F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, c \cdot \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n) = c \cdot F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n) \end{cases}$$

$\mathbf{x}_i = \sum_{k_i=1}^{n} x_{k_i\,i} \mathbf{e}_{k_i}$ とおくと，

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n) &= F(\sum_{k_1=1}^{n} x_{k_1\,1}\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \sum_{k_i=1}^{n} x_{k_i\,i}\mathbf{e}_{k_i}, \dots, \sum_{k_n=1}^{n} x_{k_n\,n}\mathbf{e}_{k_n}) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} x_{k_1\,1} \cdots x_{k_n\,n}\, F(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) \end{aligned}$$

同じ列を持つ行列の行列式の値は 0 より，$\{\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}\}$ は全て異なる場合のみが意味がある．即ち，$k_1, k_2, \dots, k_n$ は $1, 2, \dots, n$ の一つの順列の場合のみを考えれば良い．よって，置換

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \in S_n$$

について和を取れば良い．

$$F(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) = \mathrm{s}gn \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$$

より，

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in S_n} sgn(k_1, \dots, k_n) x_{k_1\,1} \cdots x_{k_n\,n} = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \left| X \right|$$

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = \begin{vmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \ldots & A\mathbf{e}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AE \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix}$$

より

$$\begin{vmatrix} AX \end{vmatrix} = F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{vmatrix} X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \end{vmatrix}$$

□

12.3.5 一般のクラメールの公式

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を未知数とする連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

の解に関するクラメールの公式について解説しよう.

今，$|A| \neq 0$ ならば $A^{-1} = \dfrac{\widetilde{A}}{|A|}$ ゆえ，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta 21 & \ldots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta 22 & \ldots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta 2n & \ldots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \Delta_{11}b_1 + \Delta_{21}b_2 + \cdots \Delta_{n1}b_n \\ \Delta_{12}b_1 + \Delta_{22}b_2 + \cdots \Delta_{n2}b_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{1n}b_1 + \Delta_{2n}b_2 + \cdots \Delta_{nn}b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{21} + \cdots b_n\Delta_{n1} \\ b_1\Delta_{12} + b_2\Delta_{22} + \cdots b_n\Delta_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_1\Delta_{1n} + b_2\Delta_{2n} + \cdots b_n\Delta_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，任意の j に対して

$$|A| \cdot x_j = b_1\Delta_{1j} + b_2\Delta_{2j} + \cdots b_n\Delta_{nj}$$

は A の第 j 列 $\mathbf{a}_j$ を $\mathbf{b}$ で置き換えた行列の行列式を j 列展開したものと一致する．即ち，

$$|A| \cdot x_j = b_1\Delta_{1j} + b_2\Delta_{2j} + \cdots b_n\Delta_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i\,j-1} & b_i & a_{i\,j+1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad x_j = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i\,j-1} & b_i & a_{i\,j+1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

を得る．これを連立１次方程式に関する**クラメールの公式**という．行列式を列ベクトル表示して表せば

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n\end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{b} & \ldots & \mathbf{a}_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n\end{vmatrix}}, \ldots, x_j = \frac{\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{b} & \ldots & \mathbf{a}_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_j & \ldots \mathbf{a}_n\end{vmatrix}} \cdots$$

命題 12.15 (クラメールの公式)**.** 連立１次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は行列式 $|A| \neq 0$ のとき，

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{|\mathbf{b}\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_j\ \ldots\ \mathbf{a}_n|}{|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_j\ \ldots\ \mathbf{a}_n|} \\ \dfrac{|\mathbf{a}_1\ \mathbf{b}\ \ldots\ \mathbf{a}_j\ \ldots\ \mathbf{a}_n|}{|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_j\ \ldots\ \mathbf{a}_n|} \\ \vdots \\ \dfrac{|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{b}\ \ldots\ \mathbf{a}_n|}{|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_j\ \ldots\ \mathbf{a}_n|} \\ \vdots \\ \dfrac{|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{b}\ \ldots\ \mathbf{a}_n|}{|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_j\ \ldots\ \mathbf{a}_n|} \end{pmatrix}$$

12.3.6 固有値・固有ベクトル

$$n \text{ 次正方行列 } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 及び } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ に対し}$$

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Longleftrightarrow (A - \lambda\, E) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

を満たす λ を A の**固有値**といい，$\mathbf{x}$ を λ に付随する**固有ベクトル**という．このとき，$A - \lambda\, E$ の逆行列は存在しない．実際，存在すれば $|A - \lambda\, E| \neq 0|$ かつ $\mathbf{x} = (A - \lambda\, E) \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. これは $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に反する．こうして，

$$|A - \lambda\, E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

今，

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

ここで各 c_{ij} は λ の高々 1 次式なのでそれらの積 $c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)}$ は λ の高々 n 次式である．こうして, 最終的に

$$f(\lambda) := \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + |A| = 0$$

であることが確かめられる．$f(\lambda)$ を行列 A の**特性多項式**（または**固有多項式**）といい，$f(\lambda) = 0$ を行列 A の**特性方程式**（または**固有方程式**）という．特性方程式の解が固有値である.

例題 12.2. $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 及び $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-l \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + |A_2| = 0$$

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + (\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33})\lambda - |A_3| = 0$$

但し，Δ_{ij} は A_3 の (i,j)-余因子を表す.

注意 12.17. (1) n 次方程式の解は例え係数が実数であっても虚数解を持つ場合がある．例えば，A_2 の特性方程式

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + |A_2| = 0$$

は判別式

$$D = ((a_{11}+a_{22})^2 - 4|A_2| = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{21}a_{12} < 0$$

の場合は虚数解を持つ.

(2) （実係数の）特性方程式 $f(\lambda)=0$ が虚数解 $\lambda = p+qi$ $(p,q \in \mathbb{R})$ を持てば λ の共役複素数 $\overline{\lambda}$ もまた特性方程式の解である，即ち，$f(\overline{\lambda})=0$. こうして，奇数次数の特性方程式は少なくとも一つ実数解を持つ．即ち，実固有値を持つ.

(3) 固有値 λ が虚数ならば λ に付随ずる固有ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \; z_1 = \alpha_1 + i\,\beta_1 \quad , z_2 = \alpha_2 + i\,\beta_2 \in \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\,\mathbb{R} \quad (\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{R})$$

は複素数ベクトルである.

例. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ より $\lambda = 1 \pm i$.

▶ $\lambda = 1 + i$ に対する固有ベクトルは $(A - (1+i)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{x}$ を一つ求めればよい．例えば,

$$(A - (1+i)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \therefore \quad -ix + y = 0. -x - iy = 0 \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

▶ $\lambda = 1 - i$ に対する固有ベクトルは $(A - (1-i)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{x}$ を一つ求めればよい．例えば,

$$(A - (1-i)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \therefore \quad ix + y = 0. -x + iy = 0 \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

(4) 代数学の基本定理により固有方程式の解は複素数の範囲で少なくとも一つ存在する.

- ２次，３次，４次の正方行列の固有値を具体的に求めることは可能であるが面倒である.
- アーベルの定理により，５次以上の代数方程式については一般には解の公式はないので５次以上の正方行列に対し固有値や固有ベクトルを具体的に求めることは一般には不可能である.
- 固有値や固有ベクトルは存在し線形代数における理論の構築には必要な概念である.

命題 12.16. 相異なる固有値に付随する固有ベクトル達は一次独立である.

即ち，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ を行列 A の固有値とし，$x_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ を対応する固有値

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

とする．このとき，固有ベクトル $x_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ は一次独立である，即ち,

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots a_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

である

証明. 数学的帰納法で証明する．$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ までが一次独立とする．即ち,

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0} \cdots ①$$

ならば $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$．今,

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + a_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \cdots ②$$

とする．このとき,

$$A\mathbf{x}_j = \lambda\,\mathbf{x}_j \ (1 \leqq j \leqq k)$$

より

$$A(a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+\cdots+a_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}+a_k\mathbf{x}_k) = A\,\mathbf{0} = \mathbf{0}) \Longleftrightarrow a_1A\mathbf{x}_1+a_2A\mathbf{x}_2+\cdots+a_{k-1}A\mathbf{x}_{k-1}+a_kA\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

$$\therefore \quad a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \cdots ③$$

$\lambda_k \times ② - ③$ より

$$a_1(\lambda_k - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_k - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}$$

$\lambda_k \neq \lambda_j \ (j \neq k)$ かつ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ が一次独立より

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$$

これを ② に代入して $a_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$．$\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ より $a_k = 0$ を得る．　よって, 関係式 ③ を満たす $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

を得る．一次独立性の定義により，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k$ は一次独立．である．　□

命題 12.17. n 次正方行列 A の全ての固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が相異なるとき, それに付随する固有(列)ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ は一次独立であり, これらベクトルを列ベクトルにもつ行列 $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$ に対し

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

これを行列 A の対角化という.

証明. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ は一次独立より，行列 $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$ の逆行列 P^{-1} が存在する．一方

$$\begin{cases} A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \\ A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2 \\ \qquad\vdots \\ A\mathbf{x}_n = \lambda_n\mathbf{x}_n \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \ldots & A\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \ldots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

今

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \ldots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \;\therefore\; AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

こうして，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ を得る. □

注意 12.18. ▶ n 次方程式

$$f(\lambda) := \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \quad (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r} = 0$$

と因数分解される．ここで，$k_j\ (1 \leqq j \leqq r)$ は解の重複度と呼ばれる．代数学の基本定理から n 次方程式は重複も含め n 個の解（虚数解も含む）を持つので

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

▶ 固有ベクトルに関しある条件を満たせば

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & O \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

となる行列 Q が存在する．証明には**固有空間**の基底の問題が深く関係する．

ある条件とは，相異なる各固有値 λ_i に付随する一次独立な固有ベクトルが k_i 個あるときである．

異なる固有値に付随する固有ベクトル達は一次独立であること及び $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ から $\left\{\mathbf{x}_i^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}, \ldots . \mathbf{x}_i^{(k_i)}\ (1 \leqq i \leqq r)\right\}$ は一次独立な n 個のベクトルである．よって，行列

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{(1)} & \ldots & \mathbf{x}_1^{(k_1)} & \mathbf{x}_2^{(1)} & \ldots & \mathbf{x}_2^{(k_2)} & \ldots\ldots & \mathbf{x}_r^{(1)} & \ldots & \mathbf{x}_r^{(k_r)} \end{pmatrix}$$

の逆行列 Q^{-1} が存在する（逆行列が存在する行列を**正則行列**という）.

$$
\begin{aligned}
AQ &= \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1^{(1)} & \ldots & A\mathbf{x}_1^{(k_1)} & A\mathbf{x}_2^{(1)} & \ldots & A\mathbf{x}_2^{(k_2)} \ldots\ldots & A\mathbf{x}_r^{(1)} & \ldots & A\mathbf{x}_r^{(k_r)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1^{(1)} & \ldots & \lambda_1\mathbf{x}_1^{(k_1)} & \lambda_2\mathbf{x}_2^{(1)} & \ldots & \lambda_2\mathbf{x}_2^{(k_2)} \ldots & \ldots & \lambda_r\mathbf{x}_r^{(1)} & \ldots & \lambda_r\mathbf{x}_r^{(k_r)} \end{pmatrix} \\
&= Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & O \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & \ddots \\ & O & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & O \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & \ddots \\ & O & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}
$$

12.4　ケーリー・ハミルトンの定理

12.4.1　複素ベクトルの内積

実正方行列 A の固有値 λ は n 次方程式 $|A - \lambda\,E| = 0$ の解は一般には虚数解であるのでそれに付随する固有ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ は複素数ベクトル（各成分が複素数からなるベクトル）である.

そこで，複素数ベクトルの系

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\}\ (1 \leqq r \leqq n)$$

但し，

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \ (1 \leqq j \leqq r)\ , \quad x_{ij} = u_{ij} + \sqrt{-1} v_{ij} \ (\ u_{ij}, v_{ij} \in \mathbb{R})$$

を考える．

定義 12.6. 複素数ベクトルの系　$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとは

$$\mathbf{a}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0},\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$$

注意 12.19. 一次独立性を問題にするときは $\mathbb{R}$ 上か $\mathbb{C}$ 上かを明確にする必要がある．

例. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であるが $\mathbb{C}$ 上一次独立でない（一次従属）．実際，$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を満たす実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ は $\alpha = \beta = 0$. 一方，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$ より $\mathbb{C}$ 上一次従属である．

　複素数ベクトル全体の集合を

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ :\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{C} \right\}$$

とおく．

定義 12.7. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$\mathbb{C}$ 上の内積（**エルミート内積**ともいう）を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \\ \vdots \\ \overline{y}_n \end{pmatrix} = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i$$

で定義する．このとき，共役を取れば

$$\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = \overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \ldots & \overline{x}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \cdots + \overline{x}_n y_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$$

特に

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \geqq 0$$

を $\mathbf{x}$ の**ノルム**（大きさ）という．（但し，$|x_i|^2 = x_i \cdot \overline{x}_i$）．

注意 12.20. ノルム $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$ は実数なので $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$．よって，

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

命題 12.18. (1) $\|\mathbf{x}\| \geqq 0$ であり，$\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

(2) $|\langle \mathbf{x}.\mathbf{y} \rangle| \leqq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$（シュワルツの不等式）．$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$（三角不等式）．

証明. (2) の証明：任意の複素数 $a, b \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \|a\mathbf{x} + b\mathbf{y}\|^2 = (a\mathbf{x} + b\mathbf{y})^{\mathrm{T}} \cdot (\overline{a\mathbf{x}} + \overline{b\mathbf{y}}) = (a\mathbf{x}^{\mathrm{T}} + b\mathbf{y}^{\mathrm{T}}) \cdot (\overline{a\mathbf{x}} + \overline{b\mathbf{y}}) \\ &= |a|^2 \|\mathbf{x}\|^2 + a\overline{b}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}}) + \overline{a}b(\mathbf{y}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{x}}) + |b|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= |a|^2 \|\mathbf{x}\|^2 + a\overline{b}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}}) + \overline{a}b(\overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y}) + |b|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

$a, b \in \mathbb{C}$ は任意だから，$a = \|\mathbf{y}\|^2,\ b = -(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}}) = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,\ \bar{b} = -(\overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y})$ を上式右辺に代入して．

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad 0 &\leqq \|\mathbf{y}\|^4\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y}) - \|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y}) + |(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}})|^2\|\mathbf{y}\|^2 \\
&= |\mathbf{y}\|^4\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2|(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}})|^2 - \|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2|(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}})|^2 \\
&= |\mathbf{y}\|^4\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y}) \\
&= |\mathbf{y}\|^4\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2|\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}}|^2 = |\mathbf{y}\|^2\left(\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - |\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}}|^2\right) \\
&= \|y\|^2\left(\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2\right) \quad (\because \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad 0 \leqq \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \quad \text{i.e.} \quad \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \geqq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|
$$

定義 12.8. (1) 複素数ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ は（エルミート）内積

$$
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{y}} = 0 \Longleftrightarrow \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = \overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y} = 0
$$

のとき**直交**しているという

(2) n 個の $\mathbb{C}^n$ の複素数ベクトルの系 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ が正規直交系であるとは,

$$
\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle} = \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}_j = \overline{\mathbf{x}}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_j = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}
$$

を満たすときをいう．必然的に $\mathbf{x}_j \neq 0\ (1 \leqq j \leqq n)$.

注意 12.21. (1) $\mathbb{C}^n$ における n 個の一次独立な複素数ベクトルの系 $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ からシュミットの直交化法により正規直交系正規直交系 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ を構成できる．

(2) $\mathbb{C}^n$ における n 個の複素数ベクトルからなる正規直交系 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ は一次独立である．

(3) $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底である．即ち，$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$.

このことは任意の複素数ベクトル $\mathbf{y}$ に対して $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n$$

と表されることを意味する．

(1) についてはシュミットの直交化法の節にて解説済み．(2) の証明：$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ とする．各 $\mathbf{x}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ と左辺の内積を取れば各 j に対し $\alpha_j = 0$ $\quad \therefore \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. よって，$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ は一次独立である．

(3) の証明：まず，n 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$ は正則行列であることを示す．即ち，逆行列 P^{-1} が存在する．実際，行列 P を基本変形することにより単位行列に変形できる．

$$P \text{ が正則行列} \quad \overset{\text{必要十分}}{\Longleftrightarrow} \quad P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{ならば} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が分かる．次に $\mathbb{C}^n$ の基底であることを示す．任意の $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P^{-1}\mathbf{y}$ とおくと，

$$\mathbf{y} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots \alpha_n \mathbf{x}_n$$

を得る．よって，$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ $\square$

$\mathbb{C}^n$ における n 個の複素数ベクトルからなる正規直交系 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ に対し，n 次正方行列

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

とおく.

U の**共役転置行列**：

$$U^* := \overline{U}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \overline{x}_{11} & \overline{x}_{21} & \dots & \overline{x}_{n1} \\ \overline{x}_{12} & \overline{x}_{22} & \dots & \overline{x}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{x}_{1n} & \overline{x}_{2n} & \dots & \overline{x}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{x}}_1^{\mathrm{T}} \\ \overline{\mathbf{x}}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

に対し，$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ は正規直交基底より，

$$\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{x}}_j = \overline{\mathbf{x}}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\therefore \quad U^* \cdot U = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{x}}_1^{\mathrm{T}} \\ \overline{\mathbf{x}}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{x}}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_1 & \overline{\mathbf{x}}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_2 & \dots & \overline{\mathbf{x}}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_n \\ \overline{\mathbf{x}}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_1 & \overline{\mathbf{x}}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_2 & \dots & \overline{\mathbf{x}}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_1 & \overline{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_2 & \dots & \overline{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad U^* = U^{-1}$$

定義 12.9. $U^* = U^{-1}$ なる行列 U を**ユニタリ行列**という.

命題 12.19. n 次正方行列 A は適当なユニタリ行列 U により上三角行列に変換される．即ち，

$$U^{-1} \cdot A \ \cdot U = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

証明. 証明は数学的帰納法による．$n = 1$ のときは明らか．$n - 1$ 次正方行列 A_1 に対しては $n - 1$ 次のユニタリ行列 U_1 を用いて $U_1^{-1} A_1 \ U_1$ は上三角行列とできると仮定する．そこで，n 次正方行列 A の１つの固有値を λ_1 とし付随する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ とすると，$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$.

また，$\mathbf{x}_1$ 及び残りの $n - 1$ 個の一次独立な複素ベクトル系 $\{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\}$ を適当に選び，シュミットの直交化法を通して全体として $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\}$ が正規直交基底となるようにできる．そこで，

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

とおくと，V は n 次ユニタリ行列，即ち，$V^* = V^{-1}$ であり，

$$AV = A\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \dots & A\mathbf{x}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \dots & A\mathbf{x}_n\end{pmatrix}$$

$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底なので

$$A\mathbf{x}_2,\ A\mathbf{x}_3,\ \dots, A\mathbf{x}_n \in \langle \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \dots, \mathbf{x}_n\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\lambda_1\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \\ A\mathbf{x}_2 = \alpha_{21}\mathbf{x}_1 + \alpha_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_{2n}\mathbf{x}_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{2i}\mathbf{x}_i \\ A\mathbf{x}_3 = \alpha_{31}\mathbf{x}_1 + \alpha_{32}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_{3n}\mathbf{x}_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{3i}\mathbf{x}_i \\ \quad\vdots \qquad \dots \quad \dots \\ A\mathbf{x}_n = \alpha_{n1}\mathbf{x}_1 + \alpha_{n2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_{nn}\mathbf{x}_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ni}\mathbf{x}_i\end{cases}$$

なる行列

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc}\lambda_1 & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \hline 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc}\lambda_1 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & \Large A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

が存在する．一方，

$$AV = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{c|ccc}\lambda_1 & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \hline 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn}\end{array}\right) = \begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{x}_1 & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{2i}\mathbf{x}_i & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{3i}\mathbf{x}_i & \cdots\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ni}\mathbf{x}_i\end{pmatrix}$$

であることに注意する．そのとき，

$$\therefore\quad VA = V\left(\begin{array}{c|ccc}\lambda_1 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & \Large A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \therefore\quad V^{-1}A\,V = \left(\begin{array}{c|ccc}\lambda_1 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & \Large A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

今，A_1 は $n-1$ 次行列だから帰納法の仮定から $n-1$ 次のユニタリ行列 V_1 が存在し

$$V_1^{-1}A_1V_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & * & * \\ & \lambda_3 & * & * \\ & & \ddots & * \\ & O & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{（上三角行列）}$$

とできる．

$$W = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & \Large V_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{2j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{pmatrix} \ (2 \leqq j \leqq n)$$

$\left\{ \mathbf{v}'_j = \begin{pmatrix} v_{2j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{pmatrix} \quad (2 \leqq j \leqq n) \right\}$ は $\mathbb{C}^{n-1}$ 正規直交基底であることから

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_j \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

故に，W はユニタリ行列である，即ち，$W^* = W^{-1}$. そこで，$U = V \cdot W$ と億.

$$U^{-1} \cdot A \cdot U = W^{-1} \cdot (V^{-1} \cdot A \cdot V) \cdot W = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & \Large V_1^{-1}A_1V_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

これは，n 次正方行列に対しても命題が正しいことを示している． □

定理 12.2 (ケーリー・ハミルトンの定理)**.** 行列 A の固有多項式を $\phi_A(\lambda)$ とすると，A の多項式行列 $\phi_A(A) = O$ が成立する．

証明. 上記の命題から A はユニタリ行列 U によって三角化可能，即ち $U^{-1}AU = T$ であった．上記の

三角行列 T の固有方程式は

$$\phi_T(\lambda) := \Big|\lambda\, E - T\Big| = -\Big|T - \lambda\, E\Big| = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

そこで，

$$\phi_T(T) = (T - \lambda_1 E)(T - \lambda_2 E)\cdots(T - \lambda_n E)\mathbf{x}$$

とおく．そのとき，任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対し，

$$(T - \lambda_n E)\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_n & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_{n-1} - \lambda_n & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る．次に

$$(T - \lambda_{n-1} E)\underline{(T - \lambda_n E)\cdot\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_{n-1} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_{n-1} & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n - \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以下，順に $(T - {}_{1n-2}E), \dots (T - \lambda_1 E)$ を左から掛けて行くことにより，最終的に

$$(T - \lambda_1 E)(T - \lambda_2 E)\cdots(T - \lambda_{n-1} E)(T - \lambda_n E)\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を得る．ベクトル $\mathbf{x}$ の任意性から

$$\phi_T(T) = (T - \lambda_1\, E)(T - \lambda_2\, E)\cdots(T - \lambda_{n-1}\, E)(T - \lambda_n\, E) = O$$

が成立する．そのとき，

$$\left|\lambda \cdot E - T\right| = \left|\lambda \cdot E - U^{-1} A U\right| = \left|U^{-1}(\lambda \cdot E - A) U\right| = \left|U^{-1}\right| \cdot \left|\lambda \cdot E - A\right| \cdot \left|U\right| = \left|\lambda \cdot E - A\right|$$

こうして，A の T の固有方程式は一致する．こうして，$\therefore \quad \phi_T(\lambda) = \phi_A(\lambda)$

$$\therefore \quad O = \phi_T(T) = \phi_T(A) = \phi_A(A)$$

以上より，A の固有方程式を $\phi_A(\lambda)$ としたとき，$\phi_A(A) = 0$ を得る．