工学系・経済系 初年次基礎数学講義案内 (II)

＝ 微積分編＝

山崎充裕 [*] , 石田明男 [†] 大嶋康裕 [‡] , 古島幹雄 [§]

2024 年 9 月 23 日

目 次

[*] 熊本高等専門学校 准教授
[†] 熊本高等専門学校 講師
[‡] 崇城大学 教授
[§] 熊本大学 名誉教授

1　記号および準備

1.1　区間：開区間，閉区間

(i) **開区間**

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

とは $a<x<b$ を満たす実数 x の集合のこと．

(ii) **閉区間**

$$[a,b]=\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$$

とは $a \leqq x \leqq b$ を満たす実数 x の集合のこと．

(iii) **全区間**

$$(-\infty,\ \infty) = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$$

とは実数全体の集合のことであり，**数直線** $\mathbb{R}$ と同一視される．

2 実数および連続関数

2.1 自然数、整数、有理数について

- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集まり (集合) :$\{1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots\}$
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集まり（集合）:$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots\}$
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集まり（集合）$\left\{\dfrac{n}{m}\ : m, n \text{ は整数で } m \neq 0\right\}$

2.2 小数

- 小数 : 0 と 1 の間にある数で $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ と表記する．但し, 各 a_n は $0 \leqq a_n \leqq 9$ を満たす整数
- $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ の $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ を小数部分という．また a_n を小数第 n 位の数という．

例題 2.1 (小数の型)**.**

(1) $0.141421356,\ 0.23620679,\ 0.33$（有限小数：小数点以下の数が有限個）

(2) $0.333333\cdots,\ 0.12121212\cdots$（循環小数：小数点以下一定の長さの数が循環して現れる）

(3) $0.14159765\cdots,\ 0.123254809\cdots$（非循環小数）

注意 2.1. (1) 有限小数は有理数である．また，循環小数も有理数である．

証明. 有限小数は $0.a_1a_2\cdots a_n\ (a_n \neq 0)$(小数 n 位）と表わされるので,

$$\begin{aligned}
0.a_1a_2\cdots a_n &= 0.a_1 + 0.0a_2 + 0.00a_3 + \cdots + 0.\overbrace{000\cdots 0}^{n-1}a_n \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\
&= \frac{a_1\ 10^{n-1} + a_2\ 10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^{n-1}}
\end{aligned}$$

は有理数である（分母は整数であり分子も整数の和として整数である）.

次に，循環小数が有理数であることを示そう．循環小数を

$$0.a_1a_2\cdots\dot{a}_n = 0.\overbrace{a_1a_2\cdots a_n}\overbrace{a_1a_2\cdots a_n}\cdots$$

とかく．但し，最後の $a_n \neq 0$ とする．

$$\begin{aligned} 0.a_1a_2\cdots\dot{a}_n &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^{2n}} + \cdots \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}\left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{3n}} + \cdots\right) \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10^n}} \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n - 1} \cdots (*) \end{aligned}$$

となり，有理数であることが分かる．但し，最後の式において，無限等比級数の和に関する次の事実を用いた.

定理 2.1. $|r| < 1$ ならば

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} \quad (\because \lim_{n\to\infty} r^n = 0)$$

特に，$r = \dfrac{1}{10^n}$ と置けば最後の式 $(*)$ が得られる.

(2) 有理数 r は整数部分と小数部分に分けたとき，その小数部分は循環小数として表されるもの，即ち，$r = N+$（循環小数），但し，$N \neq 0$ は整数.

(3) 無理数 z は整数部分と小数部分に分けたとき，小数部分が循環しない小数として表されるもの，即ち，$z = N+$（循環しない小数）.

(4) 実数は有理数と無理数からなるり，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は数直線上の点と 1 対 1 に対応する．実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す

以上，４つの数の集合には次の包含関係がある.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

2.3 実数数列

実数からなる数列（実数列） $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える.

▶ $\{x_n\}$ が有界とは、全ての番号 n に対し、$|x_n| \leqq M$ となる実数 R が存在するときをいう.

例題 2.2.

- 実数列 $\left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．実際、$\dfrac{n}{3^n} < 1.$

証明. （読み飛ばしてよい）不等式 $n < 3^n$ を、数学的帰納法で示す．まず、(I) $n = 1$ のとき、左辺 $= 1$, 右辺 $= 3$ で不等式は成立．(II) $n = k > 1$ のとき、不等式が成立していると<u>仮定する</u>, 即ち、$k < 3^k$ と仮定する．$n = k + 1$ のとき、帰納法の仮定から $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k > k + 1$．このことは、不等式が $n = k + 1$ のとき成立している事を示している．故に、全ての自然数 n に対して、$n < 3^n$, 即ち、$\dfrac{n}{3^n} < 1$ が成立する． □

定義 2.1.

- 実数列 $\{x_n\}$ が単調増加であるとは、$x_n \leqq x_{n+1}$ がすべての自然数 n に対して成立するときをいう．逆に，$x_n \geqq x_{n+1}$ が全ての n に対して成立するとき，数列 $\{x_n\}$ は単調減少であるという.

課題 1. 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{2}{7}$ を循環小数で表せ.

(2) 循環小数 $0.17\dot{4} = 0,174174174\cdots$ を有理数表記せよ.

(3) 数列 $\left\{\dfrac{n^2}{3^n}\right\}$ は有界である.

(4) 数列 $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$ は単調減少である.

2.4　変数と定数

(1) **変数**とは不特定の値（実数）を表す文字記号で x で表す.

(2) 変数 x が特定の実数値 a をとるとき $x = a$ と書く.

(3) 確定した実数を**定数**といい，変数 x と区別して $a, b, c, \ldots$ などの記号で表す.

2.5 近傍と近似

(1) $x = a$ の**近傍**とは $x = a$ を含む開区間のこと．例えば， 任意の十分小さい $\epsilon > 0$ に対し，

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \quad や \quad (a - \frac{\epsilon}{2}, a + \frac{\epsilon}{2})$$

などは $x = a$ の近傍である．このことからも $x = a$ の近傍は無数に存在することが分かる．

(2) x は $x = a$ に**十分近い**（表現は曖昧だが）とは，変数 x が

$$a - \epsilon < x < a + \epsilon \Longleftrightarrow |x - a| < \epsilon$$

を満たすときをいう．

近似記号

$x \fallingdotseq a$ とは x は $x \neq a$ ではあるが a に近似的に等しいという意味合いので数学記号として $\fallingdotseq$ は使われる．数学的には曖昧さが拭えないが，実用上は便利な記号である．

2.6 実関数と実関数のグラフ

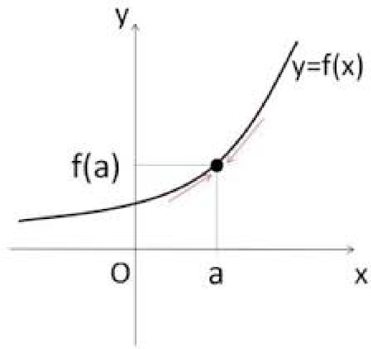
(1) 変数 x に対し，唯一つの有限な実数値（有限確定値）y を対応させる規則を記号 f で表し**関数**とよぶ．x に対応する（ただ一つの）値 y を変数 x に因んで $y = f(x)$ と表す．この時，x が不特定の実数なので値 y も不特定の実数である．このことから x を**独立変数**，y を**従属変数**（x に従属した変数）と呼ぶこともある．

(2) 変数 x の関数 $f(x)$ が定義できる（有限確定値を取る）ような x の満たすべき範囲を関数 $f(x)$ の**定義域**といい，記号 $D(f)$ で表し，また，実関数 $y = f(x)$ の取り得る値の範囲を関数 $f(x)$ の**値域**といｔ，記号 $R(f)$ で表す．

注意 2.2. 関数は対応の規則であり，関数のグラフとはこの規則を図形化したものであり，正確には別物であるが，関数と関数のグラフを同一視して考えることもある．正確には関数 $y = f(x)$ のグラフ $G(f)$ は次の集合が表す図形

$$G(f) = \{(x, y) \ : \ y = f(x)\}$$

のことである（下図）．



G_f：関数 $y=f(x)$ のグラフ

例. (1) 変数 x に対して x^2 を対応させる関数を $f(x)=x^2$ または $y=x^2$ で表し，２次関数という．関数 $y=f(x)=x^2$ の定義域は

$$D(f)=\{-\infty<x<\infty\}=(-\infty,\infty)\quad \text{数直線全体 } \mathbb{R}）$$

また，$y=x^2\geqq 0$ より $y=x^2$ の値域は

$$R(f)=\{y\geqq 0\}=[0,\infty)\quad \text{半開区間}$$

(2) 関数 $y=f(x)=\sqrt{x}$ の定義域は

$$D(f)=\{x:x\geqq 0\}$$

である．そのとき，$\sqrt{x}\geqq 0$ より値域は

$$R(f)=\{y:y\geqq 0\}=[0,\infty)$$

である．

(3) $f(x)=\sin x$（三角関数）の変数 x は<u>角度°でなく</u>**ラジアン（単位円の孤長)** である．定義域は全区間であるが，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の場合で考えることが多い．値域は

$$R(f)=\{-1\leqq y\leqq 1\}\quad \text{即ち} -1\leqq \sin x\leqq 1$$

2.7　極限値と連続性

限りなく近づくということ

(i) 変数 x がさまざまな値を取りながら定数 c に限りなく近づいている状態（または様子）を数学記号でこの場合の x には動きがある．

$$x \to c$$

で表す．（$x \fallingdotseq c$ は $x = c$ ではないが x はの近似値が c である．この場合の x には動きはない）

(ii) $x \to c$ と表したとき，x は固定された数でなく変動している数とみる．

(iii) $x \to c$ は $x = c$ を意味しない．x は c に限りなく近づくが決して c には到達しないということも起こり得る．この状況を

$$\substack{x \to a \\ x \neq a}$$

と表こともある．

(iv) $x \to \infty$ は $\dfrac{1}{x} \to 0$ を意味し，$\dfrac{1}{x} \to \infty$ は $x \to 0$ を意味する．

2.8　関数の極限値

定義 2.2.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to c} f(x) = A$ とは，x が限りなく c に近づくとき，$f(x)$ は A に限りなく近づくことを意味する．即ち，

$$x \to c \Longrightarrow f(x) \to A$$

この A を x が c に限りなく近づくときの $f(x)$ の**極限値**という．

(2) 　極限値が**有限確定値**（即ち，有限かつ唯一つの値）のとき，$\displaystyle\lim_{x \to c} f(x)$ は A に**収束する**といい，

$$\lim_{x \to c} f(x) = A < \infty$$

で表す．

(3) $A = \infty$ 無限大（有限でない）または A の値が不確定（一つの値でない）とき $\displaystyle\lim_{x \to c} f(x)$ は**発散する**という．この時，

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \overset{\text{同義}}{\Longleftrightarrow} x \to c \text{ のとき，} f(x) \to \infty$$

と書く．

注意 2.3. (i) $x \neq c$ ならば $x < c$ または $x > c$ の場合が生じる．そこで極限値が有限確定値になることの定義は次のように解釈する．

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} f(x) = A < \infty \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) = \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = A$$

- ▶ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x)$ を**右方極限値**といい，
- ▶ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x)$ を**左方極限値**という．

<u>収束するとは右方極限値と左方極限値がともに有限確定し一致するとき</u>．従って，

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x)$$

ならば $\displaystyle\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} f(x)$ は発散する．特に誤解を招かないなら

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} f(x) = \lim_{x \to c} f(x)$$

と書いても良い．

(ii) $x \to c$ のとき，x は $f(x)$ の定義域 $D(f)$ 内を動く．x が近づく値 c は一般には $D(f)$ の内部または境界点（端点）である．本来ならば，

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D_f}} f(x)$$

と記すべきであることを注意する．

例. (1) $f(x) = \sqrt{x-1}$ の定義域は $D(f) = \{x \geqq 1\}$. そのとき $0 \notin D(f)$ なので $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sqrt{x-1}$ は意味がない（実際，$x = 0$ は D_f の内点でも端点でもない）．$x = 1$ は $D(f)$ の端点なので次の極限値は意味がある．実際，

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geqq 1}} \sqrt{x-1} = 0$$

(2) $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1} \sqrt{(x-1)(x-2)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{(x-1)(x-2)} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to 2} \sqrt{(x-1)(x-2)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 2}} \sqrt{(x-1)(x-2)} \end{cases}$ は意味がある．

一方，$\sqrt{(x-1)(x-2)}$ の定義域は $x < 1$ または $x > 2$ だから，次の極限値

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{(x-1)(x-2)} \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<2}} \sqrt{(x-1)(x-2)} \end{cases}$$ は x は定義域外から 1 に近づいているので意味をなさない,

例題 2.3. $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \implies \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1 \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0.$
右方極限値と左方極限値が異なるので，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ は収束しない（実際，極限値は有限ではあるが確定値ではない）

定義 2.3. 関数 $f(x)$ が $x = c$ で連続関数であるとは,

- $f(c)$ が有限確定値である.
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to c\\ x\neq c}} f(x)$ が収束しその極限値が $f(c)$ である.

即ち，<u>極限値と関数値が等しい</u>

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\neq c}} f(x) = f(c) < \infty$$

のとき．特に,

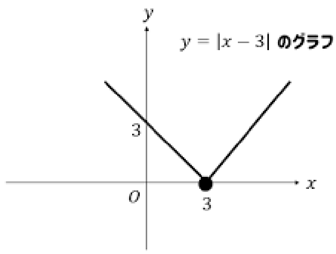
$$f(c) = \lim_{\substack{x\to c\\ x\neq c}} f(x) \iff \lim_{\substack{x\to c\\ x\neq c}} |f(x) - f(c)| = 0.$$

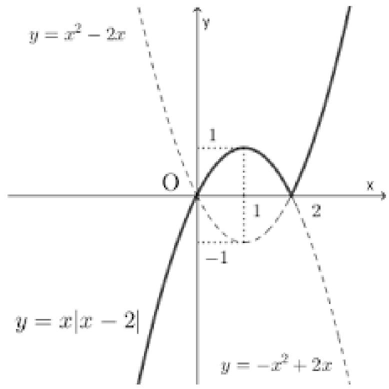
例. （連続関数の例）

(1) $y = f(x) = |x-3|$ は全区間で連続である．$|x - 3 = (x-c) + (c-3)|$ より三角不等式から $|3-c| - |x-c| \leqq |x-3| \leqq |x-c| + |c-3|$ を得る．
$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to c}(|c-3| - |x-c|) \leqq \lim_{x\to c}|x-3| \leqq \lim_{x\to c}(|x-c| + |c-3|).$
よって，$|c-3| \leqq \displaystyle\lim_{x\to c}|x-3| \leqq |c-3| \quad \therefore \quad \lim_{x\to c}|x-3| = |c-3|$．$f(x) = |x-3|$ は任意の c に対し $x = c$ で連続.

(2) $y = f(x) = x|x-2|$ は全区間で連続である.

(3) $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $x \neq 0$ では連続であるが，$x = 0$ では連続でない．実際，$x = 0$ での関数値（有限確定値）をどう定義しても，極限値は $\pm\infty$（無限大）より，極限値と関数値は一致しない.





$y = x|x-2|$ のグラフ

例題 2.4. 関数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} & \text{if} \quad x \neq a \\ \\ 2a & \text{if} \quad x = a \end{cases}$ は $x = a$ で連続である.

実際,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{(x+a)(x-a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a$$

$f(a) = 2a$ より

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$$

が成り立ち $f(x)$ は $x = a$ で連続であることを示す. □

例題 2.5. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x < 1 \\ x + A & \text{if} \quad x \geqq 1 \end{cases}$ が $x = 1$ で連続となるように A の値を求めよ.

今, $f(1) = 1 + A$ である. $f(x)$ は $x = 1$ で連続なので $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 1 + A = f(1) \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1 = f(1) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(1) = 1 + A = 1 \quad \therefore \quad A = 0$$

$\square$

次の命題は合成関数の極限値を求める際に有用である．

命題 2.1. $f(x)$ は連続関数とし $\lim_{x\to a} g(x) = A < \infty$ とする．そのとき，

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(A).$$

$\boxed{\text{略証：}}$ $\lim_{x\to a} g(x) = A < \infty$ より $x \to a \Longrightarrow y = g(x) \to A$. $\therefore \quad x \to a \Longrightarrow y \to A$.
$f(y)$ の連続性から $y \to A \Longrightarrow f(y) \to f(A)$ $\therefore \quad x \to a \Longrightarrow y \to A \Longrightarrow f(y) \to f(A)$

$$\therefore \quad \underline{x \to a} \Longrightarrow f(g(x)) \to f(A) = f(\lim_{x\to a} g(x)) \quad \therefore \quad \lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

$\square$

2.9 不定形の極限値

関数 $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-c}$ は $x = c$ では定義されない．従って，極限値 $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{x-c}$ を取り扱う際は正確には

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x-c} = \lim_{\substack{x\to c \\ x\neq c}} \frac{f(x)}{x-c}$$

とすべきであろう．

例.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if} \quad x \geqq 0 \\ -x & \text{if} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

よって，$\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ は収束しない．

定義 2.4. 関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ を満たすとき，次の極限値

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x-c} = \lim_{\substack{x\to c \\ x\neq c}} \frac{f(x)}{x-c}$$

を**不定形の極限値**という．勿論，収束する場合もあれば，発散する場合もある．

命題 2.2. $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{x-c}$ が収束ならば $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ である．

実際，$\lim_{x\to c} f(x) \neq 0$ ならば $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{x-c} = \infty$

例題 2.6. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+ax+3}{x-1}$ が収束するときの a の値と極限値を求めよ．

（解）： 分子は $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+3) = 0$． $\therefore$ $1+a+3=0$ $\therefore$ $a=-4$．こうして，

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+ax+3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-3) = -2$$

補足

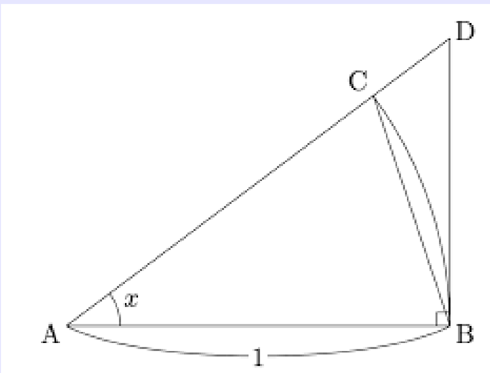
(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2.7182818284\cdots \fallingdotseq 2.718$（ネピア数：Napier's constant）．

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$（$f(x) = \sin x$ の導関数を求めるときに必要）．

(1) について：数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は上に有界かつ単調増加である．即ち，

$$\cdots < a_n < a_{n+1} \cdots < 3 \text{ かつ } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

上に有界な単調増加数列は収束する（実数の連続性公理）．よって数列 $\{a_n\}$ は収束する．(2) について：下図より，$\overline{BC} < \overset{\frown}{BC} < \overline{BD}$ $\therefore$ $\sqrt{2-2\cos x} < x < \tan x$ を得る．
$\sin x < \sqrt{2-2\cos x}$ なので $\sin x < x < \tan x$．即ち，$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ を得る．
故に極限をとって $1 = \lim_{x\to 0}(\cos x) \leqq \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \leqq 1$． $\therefore$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$．



3　微分法

3.1　微分係数

関数 $f(x)$ は $x=c$ の近傍　$(c-\delta, c+\delta)$　$\delta>0$ で定義されているとする．このとき，関数 $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ $(x\neq c)$ が $x\to c$ のときの収束するような関数 $f(x)$ を取り扱う．

定義 3.1. $f(x)$ は少なくとも $x=c$ の近傍で定義された関数とする．そのとき，極限値

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\neq c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \Big(= f'(c)\Big)$$

が収束するとき（有限確定値のとき）$f(x)$ は $x=c$ で**微分可能**という．この極限値を $f(x)$ と $x=c$ に因んで記号 $f'(c)$ で表し，$f(x)$ の $x=c$ での**微分係数**という．

補足説明

(1) 関数 $f(x)$ は開区間 (a,b) で微分可能であるとは $f(x)$ が開区間 (a,b) 内の各点で微分可能であるとき．関数の微分可能性を論じるときは閉区間 $[a,b]$ での連続性と開区間 (a,b) での微分可能性を前提とする場合が一般的である．

(2) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を関数 $f(x)$ の閉区間 $[a,b]$ での**平均変化率**という．即ち x の増分 $b-a$ に対する関数値 $y-f(x)$ の増分 $f(b)-f(c)$ の割合をいう．これは経済学では欠かせない量である．

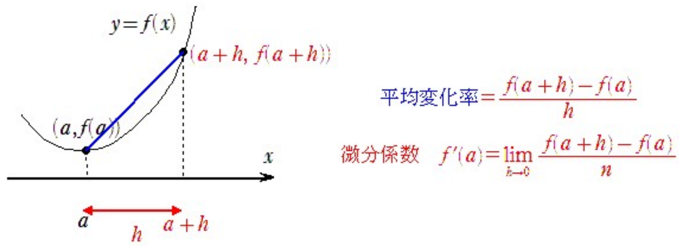
(3) $P(t)$ を時刻 t での価格とすれば $\dfrac{P(c+h)-P(t)}{h}$ は時刻が h だけ立った時の価格の変化率を表す．こうして

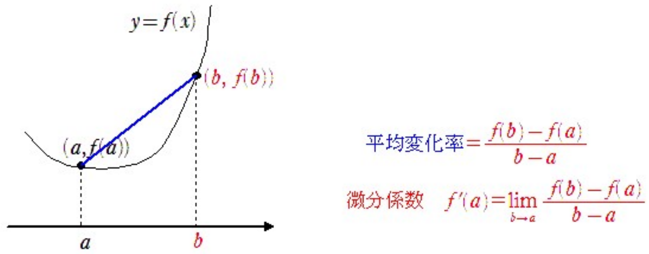
$$P'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{P(c+h)-P(t)}{h}$$

は価格の瞬間変化率，すなわち，価格が時刻 $t=c$ に於いて上昇の傾向にあるのか下降の傾向を表す量である（限界価格と呼んでいるようである）（経済学では限界とは極限の意味らしい）

(3) $f(t)$ を直線運動している物体の時刻 t の変位(位置)を表すとき，$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ は時刻が h だけ経過したときの平均速度を表し，$f'(c)$ は時刻 $t=c$ での瞬間速度を表す（この数値はスピードメーターの針の位置である）．

下の図は x が $x=a$ から $x=a+h$ に変化した時の関数 $f(x)$ の平均変化率とその極限値 $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ のイメージを示したものである．





3.2 微分係数の図形的意味

微分係数は $f'(a)$ は $y=f(x)$ のグラフの $x=a$ での接線の傾きに等しい．従って，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $A=(a,f(a))$ における接線の方程式は

$$m:\ y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

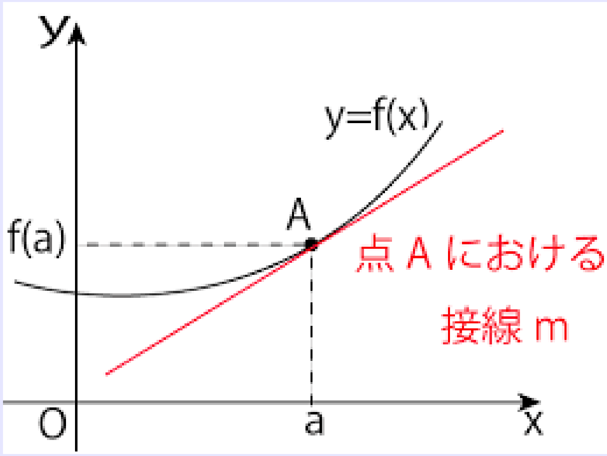
で表される．

微分係数の図形的意味

微分係数は $f'(a)$ は $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ での接線の傾きに等しい．関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $A = (a, f(a))$ における接線の方程式 m は

$$m:\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

で表される．



$m : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

命題 3.1. $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x = a$ で連続である．

しかし，逆は一般には正しくない．

証明. $\lim_{x\to a}(x-a) = 0,\ \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ より，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= 0\cdot f'(a) = 0.\end{aligned}$$

よって，$0 = \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) \quad \therefore \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$

故に，$f(x)$ は $x = a$ で連続である． □

連続だが微分可能でない関数の例

$f(x)=|x|$ は $x=0$ で連続であるが微分可能でない．実際，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{x}=1\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x,0}}\frac{-x}{x}=-1\end{cases}$$

但し，

$$|x|=\begin{cases}x & \text{if} \quad x\geqq 0\\ -x & \text{if} \quad x<0\end{cases}$$

注意 3.1. $f(x)$ 及び $g(x)$ が $x=a$ で連続ならば

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=f(a)\cdot g(a)$$

が成立つ．

例題 3.1. $y=f(x)=x^2+x$ の $x=1$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3+(1+h)--2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+4)=4\end{aligned}$$

よって接線 m の方程式は

$$m\ :\ y=f'(1)(x-1)+f(1)=4(x-1)+2=4x-2 \qquad \therefore \quad y=4x-2$$

□

3.3 連続だが微分可能でない関数の例

命題 3.2. 関数 $f(x)$ が $x=x_0$ で微分可能ならば $x=x_0$ で連続である．

証明. まず，関数の極限値に関して次の事実

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0}G(x)=B\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$$

を確認する．このとき，

$$\lim_{x\to x_0}\{f(x)-f(x_0)\}=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0\cdot f'(x_0)=0$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to x_0} \{f(x) - f(x_0)\} = 0 \quad \therefore \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

これは $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能ならば $x = x_0$ で連続であることを示している．

例. $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で連続であるが微分可能でない．実際，

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x,0}} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

但し，

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if} \quad x \geqq 0 \\ -x & \text{if} \quad x < 0 \end{cases}$$

例題 3.2. $f(x) = x^2$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ を求める．

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a$$

例題 3.3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の $x = a$ $(a > 0)$ での微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{a - x}{xa}}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(-\frac{1}{xa} \right) = -\frac{1}{a^2}$$

例題 3.4. $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}$ $(0 \leq x \leq 1)$ は $x = 0$ で微分可能ではない. 実際,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x(1 - x)} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x(1 - x)}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = +\infty \end{aligned}$$

は有限でない．よって，$f(x)$ の $x = 0$ での微分係数 $f'(0)$ は存在しない.

3.4 導関数

定義 3.2. 閉区間 $[a, b]$ で連続かつ開区間 (a, b) の各点 x に対し

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

が収束するとき，関数 $f'(x)$ を関数 $f(x)$ の**導関数**（または 1 階導関数）という．

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (a < x < b)$$

と書くこともある．導関数 $f'(x)$ は開区間 (a,b) で定義された x の関数である．また

$$f''(x) = \{f'(x)\}' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$$

を $f(x)$ の **2 階導関数**という．

導関数と微分係数及び高階導関数に関する注意

(i) 導関数 $f'(x)$ の $x=a$ での値 $f'(a)$ は $f(x)$ の $x=a$ での微分係数である．導関数 $f'(x)$ は x の関数であり，微分係数 $f'(a)$ は導関数 $f'(x)$ の $x=a$ での関数値を解釈する．

(ii) 物理的ににも幾何学的にも経済学的にも 2 階までの導関数は意味があるが，3 階以上の導関数は積極的に考える意味は薄い．

定義 3.3. 関数 $f(x)$ が $\mathscr{C}^n$ クラスであるとは，n 階導関数

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x)\ (n \geqq 0)$$

が連続であるときをいう．特に，$\mathscr{C}^0$ クラスは連続関数のクラスとする．

注意 3.2. $\mathscr{C}^n \Longrightarrow \mathscr{C}^{n-1}$ $(n \leqq 2)$ の証明：

(1.1) $\mathscr{C}^1 \Longrightarrow \mathscr{C}^0$

($\because$) 平均値の定理から $f(x+h)-f(x) = hf'(x+\theta h)$ となる $0<\theta<1$ が存在する．

このことから，$f'(x)$ の連続性より $\displaystyle\lim_{h\to 0} f'(x+\theta h) = f'(x)$

$$\lim_{h\to 0}\{f(x+h)-f(x)\} = \lim_{h\to 0} hf'(x+\theta h) = 0\times f'(x) = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to h} f(x+h) = f(x)$$

こうして，$f(x)$ は連続である． □

(1.2) $\mathscr{C}^2 \Longrightarrow \mathscr{C}^1$，

($\because$) $g(x) = f'(x)$ に対して (1.1) を適用する．このとき，$g'(x) = f''(x)$ は連続より $g(x)$ は連続，即ち，$f'(x)$ は連続である． □

例題 3.5.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

について，

▶ $f'(x)$ は $x=0$ で微分可能である

$$(\because)\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

実際，$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x| \to 0$ より分かる．

$$\therefore\quad f'(0)=0$$

▶ $f'(x)$ は $x=0$ で連続でない．実際，$x\neq 0$ のとき，

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-x^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'\cos\frac{1}{x}=2x\sin\frac{1}{x}-x^2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=\infty\text{（値が振動して不確定）}$$

こうして，$f'(0)$ は存在しない．故に，$f'(x)$ は $x=0$ で連続でない．

例. 導関数の例（覚えておくと便利である）

(1) $f(x)=x^n$ ならば $f'(x)=nx^{n-1}$（n は整数）．

(2) $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ならば $f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

(3) $f(x)=\sin x$ ならば $f'(x)=\cos x$.

(4) $f(x)=\cos x$ ならば $f'(x)=-\sin x$.

(5) $f(x)=\tan x$ ならば $f'(x)=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

関数の微分の公式（証明はより利用！）

(1) $\{af(x)\pm bg(x)\}'=af'(x)\pm bg'(x)$（微分操作の線形性）．

(2) $\Big\{f(x)\cdot g(x)\Big\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$（積の微分法）．

(3) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$（分数関数の微分法）．

(4) $\Big\{f\left(g(x)\right)\Big\}'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$（合成関数の微分法）.

(5) $\Big\{\log|f(x)|\Big\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$　（対数微分法）．

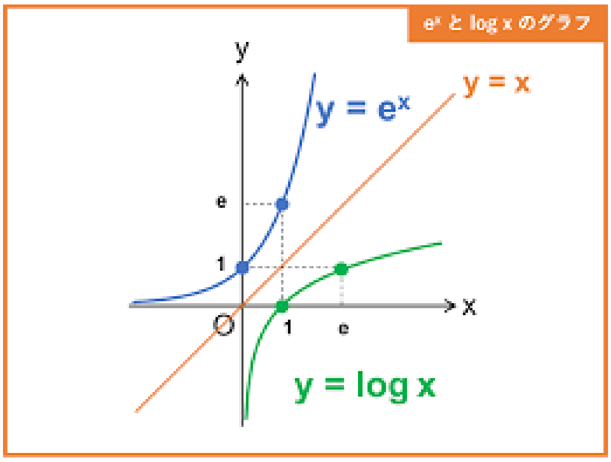
注意 3.3. 指数関数と対数関数についての注意

(1) $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ (= 2.71828182845904523536028 74\cdots)$

(2) 極限値 e をネピア数（Napier's constant）という．

(3) $f(x) = e^x$ を指数関数という

(4) ϵ を底とする対数関数 $f(x) = \log x = \log_e\ (x > 0)$ 自然対数関数という．



例. (1) $f(x) = a^x\ (a > 0)$ ならば $f'(x) = (\log_e a)\,a^x$．特に, $f(x) = e^x$ ならば $f'(x) = e^x$.

(2) $f(x) = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1\ x > 0)$ ならば $f'(x) = \dfrac{1}{x \log_e a}$. 特に，$f(x) = \log_e x$ ならば $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

注意 3.4. $(\sin x)' = \cos x$ の証明には $\lim_{h \to 0}\dfrac{\sin h}{h} = 1$ を用いる．特に,

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h \to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x\left(\lim_{h \to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\left(\lim_{h \to 0}\frac{\sin h}{h}\right) \\ &= (\cos x) \times 0 - (\sin x) \times 1 = -\sin x\end{aligned}$$

合成関数の微分の公式を用いれば

$$(\sin x)' = \left(\cos(x - \frac{\pi}{2})\right)' = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

例題 3.6. (1) $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x - x \cos x$.

(2) $\left\{\dfrac{x}{x^2+1}\right\}' = \dfrac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$

(4) $\left\{\dfrac{x^2}{x^3+1}\right\}' = \dfrac{(x^2)'(x^3+1)-x^2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}$

$$\therefore \quad \left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)' = \frac{2x(x^3+1)-x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4+2x}{(x^3+1)^2}$$

(5) $\left(ax^2 \pm e^x\right)' = 2ax \pm e^x$

(6) $\left\{x \cdot \log x\right\}' = 1 \cdot \log x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \log x + 1$

(7) $\left\{e^{x^2}\right\}' = e^{x^2}(x^2)' = 2x\, e^{x^2}$

(8) $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ の $x = 0$ における接線の方程式を求めよ．

実際，$f'(x) = 3x^2 + 3 \quad \therefore \quad f'(0) = 3.$ $\quad f(0) = 1$ より，求める接線の方程式は $y = 3x + 1$.

(9) $(\cos x)' = \left(\sin(x - \frac{\pi}{2})\right)' = \cos(x - \frac{\pi}{2}) \cdot (x - \frac{\pi}{2})' = \cos(x - \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = \cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2} = \sin x$

3.5 平均値の定理の背後

命題 3.3. (1) 関数 $g(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続かつ開区間 (a, b) で微分可能とする．そのとき，

$$g(a) = g(b) \Longrightarrow g'(c) = 0$$

を満たす c（$a < c < b$）が少なくとも一つ存在する（**ロールの定理**）．

(2) $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続かつ開区間 (a, b) で微分可能とする．そのとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす c（$a < c < b$）が少なくとも一つ存在する（**平均値の定理**）．

証明. $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x$ とおけば，

$$g(a) = g(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

ロールの定理より，$g'(c) = 0$ を満たす $a < c < b$ が少なくとも一つ存在する．一方，

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \therefore \quad g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$g'(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. こうして，平均値の定理の証明を得る．

注意 3.5. 実際，平均値の定理は次の手順で証明される．

「実数の連続性」$\Longrightarrow$「最大値・最小値の定理」$\Longrightarrow$「ロールの定理」$\Longrightarrow$「平均値の定理」

(1) （**実数の連続性公理**）：上（または下）に有界な集合は上限（または下限）をもつ．

(2) （**最大値・最小値の定理**）：閉区間 $[a.b]$ で連続な関数はこの区間内の点で最大値及び最小値をもつ．

(1)$\Longrightarrow$(2) の証明は省略する．

♣「最大値・最小値定理」$\Longrightarrow$「ロールの定理」の証明．

$g(x)$ は非定数連続関数として以後は考える．まず，$g(x)$ は閉区間で連続なので，最大値・最小値の定理より，最大値

$$\max_{a \leqq x \leqq b} g(x) = M$$

及び最小値

$$\min_{a \leqq x \leqq b} g(x) = m$$

となる $M \geqq m$ が存在する．このことは，$a \leqq x_1 \leqq b$, $a \leqq x_0 \leqq b$ なる x_1, x_0 が存在して

$$g(x_1) = M, \quad g(x_0) = m$$

を意味する．そこで，

(i) $x_1 = b$ ならば，仮定より $g(a) = g(b) = g(x_1) = M$．　よって，$\min_{a \leqq x \leqq b} g(x) = m$ となる点 x_0 は $a < x_0 < b$ を満たす．なぜなら，もし，$x_0 = a$ ならば $M = g(a) = g(b) = g(x_0) = m$ が成り立ち

$$\therefore \quad n \leqq g(x) \leqq M \ (a \leqq x \leqq b)$$

今，$M = m$ より，$g(x)$ は定数関数になりこの場合は除外する．同様に $x_0 = b$ の場合も $g(x)$ は定数関数になるので除外する．以上により，$a < x_0 < b$ として良い．

$g(x_0) = m$ は最小値なので $a < x < b$ を満たす任意の x に対して $g(x) \geqq g(x_0) = m$. こうして，$g(x_0)$ の最小性から $a < x_0 + h < b$ を満たす十分小さな $h > 0$ に対し

$$g(x_0 \pm h) \geqq g(x_0)$$

が成立つ．

$$
\begin{aligned}
0 &\geqq \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \ g'(x_0) \\
0 &\geqq \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0-h)-g(x_0)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{g(x_1-h)-g(x_1)}{-h} = -g'(x_0)
\end{aligned}
$$

よって，

$$
0 \leqq g'(x_0) \leqq g'(x_0) \leqq 0 \quad \therefore \quad g'(x_0)=0
$$

この時は $c=x_0$ と置けばよい．

(ii) (i) と同様の議論で $a<x_1<b$ なる x_1 が存在してやはり $g'(x_1)=0$ を得る．こうして，$g(x_1)=M$, $g(x_0)=m$ となる x_1, x_0 は $a<x_0$, $x_1<b$ を満たすと仮定して良い．そこで，$a<x_0\pm h$, $x_1\pm \quad h<b$ なる十分小さな $h>0$ に対して

$$
g(x_0\pm h)-g(x_0)\geqq 0, \quad g(x_1\pm h)-g(x_1)\leqq 0
$$

より上記と同様に

$$
\begin{aligned}
0 &\geqq \lim_{h\to 0}\frac{g(x_1+h)-g(x_1)}{h} = g'(x_1) \\
0 &\geqq -\lim_{h\to 0}\frac{g(x_1-h)-g(x_1)}{-h} = -g'(x_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\leqq \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0) \\
0 &\leqq -\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0-h)-g(x_0)}{-h} = -g'(x_0)
\end{aligned}
$$

を得る．

$$
0 \geqq g'(x_1) \geqq g'(x_1) \geqq 0, \quad 0 \leqq g'(x_0) \leqq g'(x_0) \leqq 0
$$

$$
\therefore \quad g'(x_1)=g'(x_0)=0.
$$

この時は $c=x_1$ または $c=x_0$ とおけばよい．

□

例題 3.7. (1) $f(x)=x^2+x$ に対し $a<b$ ならば

$$
\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^2+b-(a^2+a)}{b-a} = b+a+1 = f'(c) = 2c+1
$$

を満たす c が $a<c<b$ の範囲に少なくとも一つ存在する．

実際，$c=\dfrac{a+b}{2}$ とおけば　$a<c<b$ よりこの c が求めるもの．

(2) $f(x)=x^3$ に対し $0<a<b$ ならば平均値の定理から

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^3-a^3}{b-a}=f'(c)=3c^2$$

を満たす c が $a<c<b$ の範囲に少なくとも一つ存在する.

$$\therefore \quad b^2+ba+a^2=3c^2 \quad \therefore \quad c=\sqrt{\frac{b^2+ab+a^2}{3}}$$

$a<0<b$ ならば $c=\pm\sqrt{\dfrac{b^2+ab+a^2}{3}}$.

命題 3.4. $f(x)$, $g(x)$ は微分可能な関数とする．そのとき，$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ かつ $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}<\infty$（収束する）ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g'(a)}{f'(a)}$$

（ロピタルの定理）

例題 3.8. (1) $f(x)=e^x-1,\ g(x)=x$ とおくと

$$f(0)=g(0)=0\ \&\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1<\infty$$

$f'(0)=e^x\big|_{x=0}=1, \quad g'(0)=1$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{1}{1}=1$$

(2) $f(x)=1-\cos x+\sin x,\ g(x)=x$ とおくと，

$$f(0)=g(0)=0\ \&\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x}{1}=1<\infty$$

$f'(0)=(\sin x+\cos x)\Big|_{x=0}=1, \quad g'(0)=1$ より

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\sin x}{x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=1$$

定義 3.4. 微分可能な関数 $f(x)$ が単調増加（或いは 単調減少）とは

$$a\leqq b \Longrightarrow f(a)\leqq f(b) \quad \big(\text{或いは } f(a)\geqq f(b)\big)$$

のとき.

証明. 平均値の定理より

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), \quad a<^{\exists} c<b)$$

$f'(x)>$ ならば $f'(c)>0$ となり $f(x)$ は単調増加である．同様に $f'(x)<0$ ならば $f(x)$ は単調減少である.

3.6　高階導関数と関数の多項式近似

$f(x)$ を微分可能な関数とし $f'(x)$ を導関数とする．$f'(x)$ が微分可能のとき，即ち，$f''(x)$ が x の関数として意味をなす場合に

$$f''(x) = \{f'(x)\}' = \frac{df'(x)}{dx}$$

とおき，$f(x)$ の**２階導関数**という．

例.　(1) $f(x) = x^n \ (n \geqq 2) \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1} \Longrightarrow f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$.

(2) $$\begin{cases} f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x \Longrightarrow f''(x) = -\sin x \\ f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\sin x \Longrightarrow f''(x) = -\cos x \\ f(x) = \tan x \Longrightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x \Longrightarrow f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) \end{cases}$$

(3) $f(x) = \epsilon^x \Longrightarrow f'(x) = e^x \Longrightarrow f''(x) = e^x$

(4) $f(x) = \log x \ (x > 0) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

命題 3.5 (ライプニッツの公式（２階微分）)**.**

$$\{f(x) \cdot g(x)\}'' = f''(x) \cdot g(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g''(x)$$

例.　(1) $(x^2 e^x)'' = 2e^x + 4xe^x + x^2 e^x = e^x(x^2 + 4x + 2)$.

(2) $\left\{x^2 \log(1+x)\right\}'' = 2\log x + \dfrac{4x}{1+x} - \dfrac{x^2}{(1+x)^2} = 2\log(1+x) + \dfrac{3x^2+4x}{(1+x)^2}$.

3.7　２階のテーラーの定理

定理 3.1. 閉区間 $[a, b]$ で２階微分可能な関数 $f(x)$ に対して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

となる $c \ (a < c < b)$ が存在する．

証明. 証明はテクニカルであるが，一般的な証明を与える．まず，

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + A\frac{(b-a)^2}{2} \cdots ①$$

となる A を定める．即ち，

$$A = -\frac{2}{(b-a)^2}\{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)\} \cdots ②$$

とおく．そこで，関数 $g(x)$ を次のように定義する：

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - A\frac{(b-x)^2}{2}$$

そのとき，

$$\begin{cases} g(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - A\dfrac{(b-a)^2}{2} = 0 \quad \text{by ②} \\ g(b) = f(b) - f(b) - f'(b)(b-b) - A\dfrac{(b-b)^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$g(a) = g(b) = 0$ なのでロールの定理から $g'(c) = 0$ となる c $(a < c < b)$ が存在する．今，

$$g'(x) = -f'(x) - f''(x)(b-x) + f'(x) + A(b-x) = -f''(x)(b-x) + A(b-x) = (b-x)(A - f''(x))$$

$$\therefore \quad g'(c) = (A - f''(c))(b-c) = 0$$

$$\therefore \quad A = f''(c) \quad (\because\ c < b)$$

① より

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(b-a)^2}{2}$$

□

$a = 0, b = x,\ c = \theta x$ $(0 < \theta < 1)$ とおくと

命題 3.6.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(\theta x)}{2}\,x^2 \quad (0 < \theta < 1)$$

注意 3.6. $f(x)$ を原点 $x = 0$ の近くで 2 次関数で近似するには 3 階導関数 $f^{(3)}(x) = f'''(x)$ まで求める必要がある．① を次の形の式に置き換え，

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + A\frac{(b-a)^3}{3!}$$

となるように A を定める．即ち，

$$A = -\frac{3!}{(b-a)^3}\left\{f(b) - f(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2\right\} \cdots ③$$

とおき，$g(x)$ を次で定義すれば

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 = A\frac{(b-x)^3}{3!}$$

$g(a) = 0$ (by ③) $g(b) = 0$ が得られる．よって，ロールの定理より，$g'(c) = 0$ なる $c\ (a < c < b)$ が存在する．

$$g'(x) = \frac{(b-x)^2}{2!}\left\{A - \frac{f'''(x)}{2}\right\}$$

$$g'(c) = 0 \Longleftrightarrow \frac{(b-c)^2}{2!}\left\{A - \frac{f'''(c)}{2}\right\} = 0 \quad \therefore \quad A = \frac{f'''(c)}{2!} \quad (\because \quad a < c < b)$$

$c = a + (b-a)\theta\ (0 < \theta < 1)$ と表されることに注意する．こうして

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a+(b-a)\theta)}{3!}(b-a)^3$$

特に，

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + R_3(x), \quad ここに \quad R_3(x) = \frac{f'''(\theta x)}{3!}\,x^3$$

命題 3.7. $\begin{cases} f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)\,x + o(x^2) & （1次近似） \\ f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)\,x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^3) & （2次近似） \end{cases}$

注意 3.7. $R_3(x) = \dfrac{f'''(\theta x)}{3!}\,x^3$ なので，．

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_3 - \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3}{x^3} = 0$$

を満たす．

$$o(x^3) := R_3 - \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \quad \therefore \quad R_3 = \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

とおく．このとき，

$$\lim_{x\to 0} o(x^3) = \lim_{x\to o} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

同様に，

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + o(x^2)$$

と表される．

$o(x^n)$ を n 次の無限小またはランダウ $o(n)$ という．$x \fallingdotseq 0$ ならば $o(x^n) \fallingdotseq 0$.

例題 3.9. （2，3次近似の問題）

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{e^{\theta x}}{3!}x^3 \Longrightarrow e^x \fallingdotseq 1 + x \quad (|x| \fallingdotseq 0)$

(2) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(\theta x)^3}{3} \Longrightarrow \log(1+x) \fallingdotseq x - \dfrac{x^2}{2} \quad (|x| \fallingdotseq 0)$

(3) $\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq 1 - x + x^2 \quad (|x| \fallingdotseq 0)$

(4) $\sin x \fallingdotseq x - \dfrac{x^3}{3!} \quad (|x| \fallingdotseq 0)$

(5) $\cos x \fallingdotseq 1 - \dfrac{x^2}{2} \quad (|x| \fallingdotseq 0)$

定義 3.5. $f(x)$ を $x = a$ で **2 階連速微分可能**（$\mathcal{C}^2$ クラス）とは,

$f(x), f'(x), f''(x)$ が $x = a$ の近傍で定義され，そこで連続関数のときをいう.

例題 3.10. $f(x)$ が $x = a$ で 2 階連続微分可能ならば

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

実際，$g(h) = f(x+h) = g(0) + g'(0)h + \dfrac{g''(0)}{2!}h^2 + o(h^3)$ より,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + o(h^3),\ f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + o(h^3)$$

よって,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{h^2 f''(x)}{h^2} + \frac{o(h^3)}{h^2} \right) = f''(x) \quad \because \quad \lim_{h\to 0} \frac{o(h^3)}{h^2} = \lim_{h\to 0} h \cdot \frac{o(h^3)}{h^3} = 0$$

3.8 極値（極大値・極小値）問題

2 階連続微分可能な関数 $f(x)$ に対し

定義 3.6. $f(x)$ が $x = a$ で極大値（または極小値）をとるとは，任意の十分小さい $h > 0$ に対して,

$$f(a \pm h) \leqq f(a) \quad \Big(\text{または} \quad f(a \pm h) \geqq f(a) \Big)$$

が成立つとき.

極大値または極小値を極値という．要するに，十分小さな $h > 0$ に対し $f(a)$ の閉区間 $[a-h, a+h]$ での最大値（または最小値）である.

命題 3.8. 連続関数 $f(x)$ が十分小さな $x > 0$ に対し $f(x) \geqq> 0$（または $f(x) \geqq> 0$）ならば $f(x) + o(x^3) > 0$（または $f(x) + o(x^3) > 0$）とできる.

証明. （読み飛ばして良い）$f(x)$ は $[0,\delta_0]$ で連続とする．$0<\delta<\delta_0$ なる任意の十分小さな δ を固定する．$f(x)>0$ ならば最大値・最小値の定理から $f(x)$ は区間 $[0,\delta_0]$ で最小値 $m=\min_{\delta\leqq x\leqq\delta_0} f(x)$ をとる．このとき，$m>0$ である．（なぜなら，$m=0$ ならば $f(x_0)=m=0$ なる $x_0\in[\delta,\delta_0]$ が存在する．これはこの区間で $f(x)>0$ に反する．）$\lim_{x\to 0} o(x^3)=0$ より，$\epsilon<m$ なる任意の ϵ に対して，$\delta_1>0$ が存在して，$|x|<\delta_1$ に対し $|o(x^3)|<\epsilon$ が成立する（$\epsilon-\delta$ 法による収束の表現）．$\min\{\delta_0,\delta_1\}=\delta_2$ とおく．$\delta>0$ は任意に十分小さく取っているので $0<\delta<\delta_2$ として良い．

$$\therefore\quad f(x)+o(x^3)>f(x)-e\geqq m-\epsilon>0\ x\in[\delta,\delta_2]$$

δ の任意性及び $f(x)$ の連続性から

$$f(x)+o(x^3)>0\ (x\in(0,\delta_2])\text{ かつ }f(0)\geqq 0$$

$f(x)<0$ の場合は $-f(x)>0$ に対して同様の議論により最終的に

$$f(x)+o(x^3)<0$$

を得る． □

命題 3.9. (1) $f(a)$ が極大値であるための必要十分条件は $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$.

(2) $f(a)$ が極小値であるための必要十分条件は $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$.

証明. （略証）極大値の時のみ証明を与える（極小値の場合も同様の論法で証明される）$f(x)$ が $x=a$ で極大値 $f(a)$ をもつならば

$$f(a\pm h)\leqq f(a)$$
$$\begin{cases} 0>\dfrac{f(x+h)-f(a)}{h} & \therefore\quad 0\geqq \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(a)}{h}=f'(a)\\ 0>\dfrac{f(x-h)-f(a)}{h} & \therefore\quad 0\geqq \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(a)}{h}=-f'(a)\end{cases}$$
$$\therefore\quad 0\leqq f'(a)\leqq 0\quad\therefore\quad f'(a)=0$$

一方，テーラーの定理より

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\,h+\frac{f''(a)}{2}h^2+o\left(h^3\right)$$

$f'(a)=0$ より

$$0>f(a+h)-f(a)=\frac{f''(a)}{2}h^2+o\left(h^3\right)$$

よって

$$f''(a) < 0 \Longrightarrow \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^3) < 0$$

$$f(a+h) - f(a) < 0 \quad (h > 0) \Longleftrightarrow f''(a) < 0 \text{ かつ } f'(a) = 0$$

こうして $f(a)$ は極大値 $\Longleftrightarrow$ $f''(a) < 0$ かつ $f'(a) = 0$ □

極値を求める手順

(1) $f'(x) = 0$ の全ての解を求める．仮に，解の一つを $x = \alpha$ としよう（一般に解は 1 個とは限らない）

(2) 上記の解 $x = \alpha$ に対し $f''(\alpha) \begin{cases} > 0 \Longrightarrow f(\alpha) \text{ 極小値} \\ < 0 \Longrightarrow f(\alpha) \text{ 極大値} \\ = 0 \Longrightarrow f(\alpha) \text{ は極値の判定はできない} \end{cases}$ $(*)$

極値をが最大値・最小値を与えるとは限らないので例えば増減表で確認する．

例題 3.11. (1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 20$ $(-3 \leqq x \leqq 3)$ の最大値及び最小値を求めよ．

解：$y = y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 20 = (x+2)^2(2x-5)$ より，

$$y'(x) == 6(x+2)(2x-5), \quad y''(x) = 6(2x+1)$$

$y'(x) = 0$ の解は $x = -2\,,\,1$．$y''(-2) = -18 < 0$，$y''(1) = -27 > 0$．こうして，$y(-2) = 0$ は極大値であり $y''(1) = -27$ は極小値である．一方，区間の両端 $x = \pm 3$ の値は $y(-3) = -11$，$y(3) = 25$ はそれぞれ極大値及び極小値．区間の両端 $x = \pm 3$ での値を比較して，最大値は $y(3) = 25$であり，最小値は $y(1) = -27$（極小値)である．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-11	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	25

□

(2) $f(x) = x^2 e^{-x}$ の極値を求めよ．

解：$f'(x) = x(2-x)e^{-x}$，$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$．$f'(x) = 0$ の解は $x = 0\,,\,2$．一方，$f''(0) = 2 > 0$ より $f(0) = 0$ は極小値（実は $f(x) \geqq 0$ より $f(0)$ は最小値であることが分かる)．$f''(2) = -2 < 0$ より，$f(2) = \dfrac{4}{e^2}$ は極大値． □

(3) (i) $g(x) = \log(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$ $(x \geqq 0)$ は単調増加関数であることを示せ．

(ii) $f(x) = x\log(1+x) \quad (x \geqq 0)$ の極値を求めよ．

(i) の証明 :$g'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ $(x \geqq 0)$ より $g(x)$ は単調増加． □

(ii) の解 : (i) より $g(0) = 0$ かつ $x \geqq 0$ の時 $g(x)$ は単調増加ゆえ，$f'(x) = g(x) = 0$ の解は $x = 0$ のみ．$f''(x) = g'(x) > 0$ より $f''(0) = 2 > 0$. 故に，$f(0) = 0$ は極小値． □

4 積分法

4.1 原始関数・不定積分

定義 4.1. $F'(x) = f(x)$ $\left(\text{i.e. } \dfrac{dy}{dx} = f(x)\right)$ を満たす関数 $y = F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**といい，$y = F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$（**不定積分**という）で表す．特に，

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

また，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ は定数を除きただ一つ存在する．

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C \quad (C \text{ を積分定数という})$$

特に，

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

例. (1) $\displaystyle\int x^2\,dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx = \frac{x^3}{3} + C$

(2) $\displaystyle\int (1 + \tan^2 x)\,dx = \int (\tan x)'\,dx = \tan x + C$

注意 4.1. 原始関数は微分可能，よって，連続関数である．

原始関数の例（右辺を微分して確認せよ）

$a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ かつ C は（積分）定数.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \\
&(2) \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C \\
&(3) \quad \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx \ (a \neq 0) = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \\
&(4) \quad \int a^x\,dx \ (a > 0,\ a \neq 1) = \frac{1}{\log a}a^x + C, \quad \int e^x\,dx = e^x + C \\
&(5) \quad \int \log x\,dx = x\log x - x + C \\
&(6) \quad \int \sin kx\,dx \ (k \neq 0) = -\frac{1}{k}\cos kx + C \\
&(7) \quad \int \cos kx\,dx \ (k \neq 0) = \frac{1}{k}\sin kx + C \\
&(8) \quad \int \tan kx\,dx \ (k \neq 0) = -\frac{1}{k}\log|\cos kx| + C \\
&(9) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \\
&(10) \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \\
&(11) \quad \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\log\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right\} + C \\
&(12) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \\
&(13) \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C
\end{aligned}
$$

積分の公式（右辺を微分して確認せよ）

原始関数をもつ $f(x)$，$g(x)$ に対し，

(1) （積分の線形性）

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx(\alpha,\beta\text{は定数})$$

(2) （置換積分法）原始関数をもつ関数 $f(x)$ と微分可能な関数 $\varphi(x)$ と微分可能な関数 $\varphi(x)$ に対し

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

(3) （部分積分法） 微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ に対し，

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$

(4) （対数微分法) 微分可能な関数 $f(x)$ に対し

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$$

例． (1) $\displaystyle\int(2x^3+5\sin x)\,dx=2\int x^3\,dx+5\int\sin x\,dx=\frac{x^4}{2}-5\cos x+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{e^x}{1+e^x}\,dx\overset{x=\log t}{=}\int\frac{t}{1+t}\cdot\frac{dt}{t}=\int\frac{1}{1+t}\,dt=\log(1+t)+C\overset{t=e^x}{=}\log(1+e^x)+C$

(3) $\displaystyle\int x\cos x\,dx=\int x(\sin x)'\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{3x^2}{1+x^3}\,dx=\int\frac{(1+x^3)'}{1+x^3}=\log(1+x^3)+C$

例題 4.1. (1) $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}\,dx=\log(e^x+e^{-x})+C$

(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+2x^3}\,dx\overset{t=1+2x^3}{=}\int\frac{\sqrt{t}}{6}\,dt=\frac{1}{9}t^{\frac{3}{2}}\overset{t=1+2x^3}{=}\frac{1}{9}(1+2x^3)^{\frac{3}{2}}+C$

$\displaystyle(\because\quad t=1+2x^3\Longrightarrow dt=6x^2\,dx\quad\therefore\quad x^2\,dx=\frac{dt}{6}).$

(3) $\displaystyle J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}\quad(A>0)\overset{t=x+\sqrt{x^2+A}}{=}\int\frac{dt}{t}=\log t=\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$

$\displaystyle\because\quad t=t=x+\sqrt{x^2+A}\Longrightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}\quad\therefore\quad\int\frac{dt}{t}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$

(4) $I=\int\sqrt{x^2+A}\,dx\ (A\neq 0)=x\sqrt{x^2+A}-\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}=x\sqrt{x^2+A}-\int\dfrac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$

$x\sqrt{x^2+A}-\int\sqrt{x^2+A}\,dx+A\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx=x\sqrt{x^2+A}-\int\sqrt{x^2+A}\,dx+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$

$$\therefore 2\int\sqrt{x^2+A}\,dx=x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

$$\therefore\quad\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right\}+C$$

例題 4.2 (テクニカルな置換積分). (1) $R(x,y)$ を x, y の分数関数（有理関数）とする.

$$\int R(\cos x,\sin x)\,dx\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=}\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

実際, $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと,

$$\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt}$$

- $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{1}{t}\,dt=\log|t|\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\ ,\because\ R(\cos x,\sin x)=\frac{1}{\sin x}$

- $$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos x}\,dx&=\int\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{2}{1-t^2}\,dt=\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt\\&=\log|1+t|-\log|1-t|=\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=\log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|=\log\left|\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right|\\&=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right|^2=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right|=\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C\end{aligned}$$

(2) $I_2=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ を求めよ. $I_n:=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx\quad(I_1=\mathrm{Tan}^{-1}x)$ とおく.
その時.

$$\frac{1}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}x\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

より

$$\begin{aligned}I_2&=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx=I_1-\frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx\\&=I_1+\frac{1}{2}\int x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'dx=I_1+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{x^2+1}-\int\frac{1}{x^2+1}\,dx\right\}=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\\&=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Tan}^{-1}x+\frac{x}{x^2+1}\right)+C\qquad(*)\quad I_n=\frac{1}{2(n-1)}\left\{\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+(2n-3)\,I_{n-1}\right\}\ (n>1).\end{aligned}$$

4.2 線形微分方程式と不定積分

定義 4.2. 微分可能な未知関数 $y=f(x)$ 及び既知関数 $g(x)$，定数 a,b に対し，

(1)

$$y'+ay=g(x) \Longleftrightarrow f'(x)+af(x)=g(x)\cdots ①$$

の形の微分を含んだ方程式を**1階線形微分方程式**という．

(2)

$$y''+ay'+by=g(x) \Longleftrightarrow f''(x)+af'(x)+bf(x)=g(x)\cdots ②$$

の形の微分を含んだ方程式を**2階線形微分方程式**という．

これら方程式を満たす $y=f(x)$ を**線形微分方程式の解**という

注意 4.2. 線形微分方程式に於いて $a=b=0$ のとき，即ち，

$$f'(x)=g(x)\ ,\quad f''(x)=g(x)$$

のときは，原始関数の定義から

$$f(x)=\int g(x)\,dx+C\ ,\quad f'(x)=\int g(x)\,dx \quad \therefore \quad f(x)=\int\left(\int g(x)\,dx+C_0\right)dx+C_1$$

例.

$$f''(x)=x \Longrightarrow f'(x)=\int x\,dx+C_0=\frac{x^2}{2}+C_0 \Longrightarrow f(x)=\int\left(\frac{x^2}{2}+C_0\right)dx=\frac{x^3}{6}+C_0\,x+C_1$$

次の例で上げる $a,b\neq 0$ の場合を一般には線形微分方程式と呼んでいる．

例. (i) $y'+y=x$. このとき，$y=x-1+C\,e^{-x}$.

(ii) $$y''-3y'+2y=0 \Longrightarrow \begin{cases} y''-y'=2(y'-y) \\ y''-2y'=y'-2y \end{cases} \overset{\begin{cases} u=y'-y \\ v=y'-2y \end{cases}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} u'=2u \\ v'=v \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} u=C_1e^{2x} \\ v=C_2e^{x} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y'-y=C_1e^{2x}\cdot ① \\ y'-2y=C_2e^{x}\cdot ② \end{cases} \overset{①-②}{\Longrightarrow} \underline{y=f(x)=C_1e^{2x}-C_2e^{x}\ \text{が解}}$$

線形微分方程式の解について（補足）

(i) 1階線形微分方程式$\underline{y'+ay=g(x)}$の解について．

$$(e^{ax}y)'=e^{ax}(y'+ay)=e^{ax}g(x) \quad \therefore \quad e^{ax}y=\int e^{ax}g(x)\,dx+C$$

$$\therefore \quad y=e^{-ax}\left(\int e^{ax}g(x)\,dx+C\right)=e^{-ax}\left(\int e^{ax}g(x)\,dx\right)+Ce^{-ax}$$

(ii) 2階線形微分方程式$\underline{y''+py'+qy=0}$の解について．

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \text{（特性方程式）}$$

の解を α,β とすると解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-p \\ \alpha\beta=q \end{cases}$$

但し，α,β は必ずしも実数とは限らない（判別式 $D=a^2-4b$ の符号による）

$$y''+py'+qy=0 \Longrightarrow \begin{cases} y''-\alpha y'=\beta(y'-\alpha y) \quad \therefore \quad y'-\alpha y=C_1e^{\beta x}\cdot ① \\ y''-\beta y=\alpha(y'-\beta y) \quad \therefore \quad y'-\beta y=C_2e^{\alpha x}\cdot ② \end{cases}$$

(a) $\alpha\neq\beta$ ならば ① − ② より

$$\underline{y=\frac{C_1e^{\beta x}-C_2e^{\alpha x}}{\beta-\alpha}}$$

(b) $\alpha=\beta$ ならば $\alpha=\beta:=\lambda=-\dfrac{p}{2}, b=\lambda^2$ なので

$$y''-\lambda y=\lambda(y'-\lambda y) \quad \therefore \quad y'-\lambda y=C_1e^{\lambda x}$$

$$\therefore \quad \left(e^{-\lambda x}y\right)'=e^{-\lambda x}(y'-\lambda y)=C_1 \quad e^{-\lambda x}y=\mathbb{C}_1x+C_2$$

$$\therefore \quad \underline{y=(C_1x+C_2)e^{\lambda x}}$$

c) α,β が異なる虚数解のときは事情が異なる．このときは，$\beta=\overline{\alpha}$(共役複素数）より，$\alpha=a+bi, \quad \beta=\overline{\alpha}=a-bi$ $(a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0)$.(a) から $y=f(x)$ が実数値関数であることに注意して

$$y''+py'+qy=0 \Longrightarrow \begin{cases} y''-\alpha y'=\overline{\alpha}(y'-\alpha y) \quad \therefore \quad y'-\alpha y=C\,e^{\overline{\alpha}x}\cdot ③ \\ y''-\overline{\alpha}y=\alpha(y'-\overline{\alpha}y) \quad \therefore \quad y'-\overline{\alpha}y=\overline{C}e^{\alpha x}\cdot ④ \end{cases}$$

④ − ③ より

$$y=\frac{\overline{C}\,e^{\alpha x}-C\,e^{\overline{\alpha}x}}{\alpha-\overline{\alpha}}=\frac{\mathrm{Im}\,(\overline{C}\,e^{\alpha x})}{\mathrm{Im}\,\alpha}=\frac{e^{ax}}{b}\,(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$$

注意 4.3. 微分方程式には様々な形のものがあるが，典型的な型は１階及び２階の線形微分方程式であろう．工学や経済学でも馴染み深い．しかし，非線形の微分方程式も工学には表れるので，いろんな型の微分方程式とその解について更に進んで学習してほしい．その場合も，微分積分学が基本なので基礎をしっかり押さえておく必要がある．このガイドブックではこれ以上の深入りはしない．

4.3 定積分

今，$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする．即ち，$F'(x) = f(x)$ とする．

定義 4.3.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \left(=: \Big[F(x)\Big]_a^b \text{と書く} \right)$$

と定義し，$f(x)$ の区間 $[a, b]$ での**定積分**という．

命題 4.1. (1) $a < c < b$ に対し

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$(\because) \int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)\ ,\ \int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c)$$

$$\therefore \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(2)

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

$(\because)$ $F'(x) = f(x),\ G'(x) = g(x)$ より

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx &= \int_a^b (\alpha F'(x) + \beta G'(x))\ dx = \int_a^b (\alpha F(x) + \beta G(x))'\ dx \\
&= \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) \\
&= \alpha (F(b) - F(a)) + \beta (G(b) - G(a)) \\
&= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$$

$(\because)\quad \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x+h) - F(x)$ より

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$$

(4) （平均値の定理）

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

となる $c\ (a < c < b)$ が少なくとも一つ存在する．

$$(\because)\quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c) \quad (a <^{\exists} c < b)$$

(4) $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は $f(x)$ の原始関数である．即ち，$F'(x) = f(x)$.

$(\because)$

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\therefore\quad F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x) \quad \text{by (3)}$$

注意 4.4. 定積分の値は正になるとは限らない．実際,

(1) $\int_0^1 x(x-1)\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6} < 0.$

(2) $\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left[\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2\right]_0^2 = -\dfrac{2}{3}.$

例題 4.3. (1) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}.$

(2) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^3 = \left(\frac{27}{3} - 9\right) = 0.$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx = \Big[x(\log x - 1)\Big]_1^2 = 2(\log 2 - 1) - 1(\log 1 - 1) = 2\log 2 - 1.$

(4) $\displaystyle\int_1^2 x^n \log x\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right)\right]_1^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1}\left(\log 2 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^2}.$

(5) $\displaystyle\int_1^3 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_1^3 = e^3 - e.$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \overset{x=\tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because\ dx = (1+\tan^2 t)\,dt\ \right).$

(10) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\ dt = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

例題 4.4. $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$

まず，$x = \dfrac{\pi}{2} - t$ とおくと，$dx = -dt$ であり $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$. また，$x\ :\ 0 \to \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow t\ :\ \dfrac{\pi}{2} \to 0.$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\,(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

次に，部分積分法より

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n-1} x\,dx \\
&= \Big[(-\cos x)\sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\left(\sin^{n-1} x\right)'\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)\left(\sin^{n-1} x\right)'\,dx \\
&= \int \cos x\big\{(n-1)\sin^{n-2} x(\sin x)'\big\}\,dx = (n-1)\int \cos x\cdot\cos x\cdot\sin^{n-2} x\,dx \\
&= (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx = (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx \\
&= (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n\ dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

$\therefore\quad nI_n = (n-1)I_{n-2} \quad \therefore\quad I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ 特に,$I_0 = \dfrac{\pi}{2},\quad I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot I_{n-4}\cdots \begin{cases} \cdot\dfrac{1}{2}\cdot I_0 \text{ if } n \text{ is even} \\ \\ \cdot\dfrac{2}{3}\cdot I_1 \text{ if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

4.4　区分求積法

区分求積法（補足）

閉区間 $[a,b]$ の分割とは $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を満たす有限個の分点 $\Delta := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ をいう．分点の取り方や分点の数は無限にある．$|\Delta| = \max_{1 \leqq k \leqq n} |x_k - x_{k-1}|$ を分割の大きさという．連続関数 $f(x) \geqq 0$ 及び分割 Δ に対し平均値の定理より

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \\ &= (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}f(\xi_k) := S(f, \Delta; \xi),\ \xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n\}.\end{aligned}$$

$S(f, \Delta; \xi)$ は $y = f(x)$ の区間 $[a,b]$ 上の面積の過剰和もしくは不足和に相等するものである．任意の分割 Δ と ξ に対し，

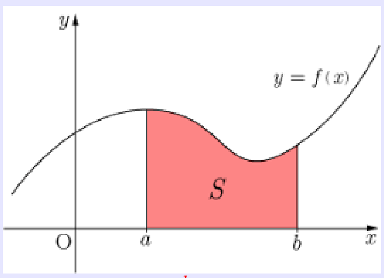
$$\int_a^b f(x)\,dx = S(f, \Delta; \xi), \quad \therefore \quad \lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \Delta; \xi) = \int_a^b f(x)\,dx$$

このように，$f(x) \geqq 0$ のときは $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は $y = f(x)$ の区間 $[a,b]$ 上の面積と定義できる．

こうして，$f(x) \geqq 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ の時は S は関数 $f(x)$ のグラフ $y = f(x)$ の区間 $a \leqq x \leqq b$ 上の部分の面積

$$S = \int_a^b f(x)\,dx > 0$$

となる（Fig.3.3 を見よ）



$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Fig.3.3

注意 4.5. 定積分に関する基本的な性質の証明には定積分の定義に立ち帰る必要がある．しかし，実用上は性質や公式などの結果のみを応用するので，定義や命題の証明にあまり拘

らず，定理や公式などを使い慣れること，使いこなせる事が重要である．演習問題を解く過程で理論の中が皮膚感覚で分かってくるように思う．

4.5　広義積分

関数 $f(x)$ が半開区間 $(a,b]$（または $[a,b)$）で連続な関数が $f(a)=\infty$（または $f(b)=\infty$），即ち $\lim_{h\to 0} f(a+h)=\infty$ （または $\lim_{h\to 0} f(b-h)=\infty$）のとき，$x=a$（または $x=b$）を $f(x)$ の**特異点**と呼ぼう．

例.　(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は半開区間 $(0,1]$ で連続で $x=0$ は特異点.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ $(a<b)$ は開区間 (a,b) で連続で $x=a,\ x=b$ は特異点.

連続関数 $f(x)$ が積分区間の両端もしくは片端を特異点に持つ定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

または, 積分区間が有限でない $[a,\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,\infty)$ 上の積分を**広義積分**（improper integral）という．

広義積分とは次の形のものをさす.

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (f(a)=\infty) \quad , \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad (f(b)=\infty)$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (f(a)=f(b)=\infty)$$
$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

例題 4.5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}\,dx$ 及び $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda}\,dx$ は広義積分である.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda} & \text{if} \quad \lambda<1 \\ \infty & \text{if} \quad \lambda=1 \\ \infty & \text{if} \quad \lambda>1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\lambda} & \text{if} \quad \lambda>1 \\ \infty & \text{if} \quad \lambda=1 \\ \infty & \text{if} \quad \lambda<1 \end{cases}$$

このように広義積分であっても積分の値は有限確定値になる場合がある.

命題 4.2. （広義積分の収束条件）

(1) $f(x)$ が $(a.b]$ で連続かつ $x = a$ が特異点とする．そのとき，$|f(x)| \leqq \dfrac{M}{(x-a)^{\lambda}}$ となる定数 $M > 0$ 及び $\lambda < 1$ が存在すれば，広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \text{（収束する）}$$

同様に $[a,b)$ で連続かつ $x = b$ が特異点の場合，$|f(x)| \leqq \dfrac{M'}{(b-x)^{\lambda}}$ なる $M' > 0$ 及び $\lambda < 1$ が存在すれば広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \text{（収束する）}$$

(2) 無限区間 $[a,\infty)$ で連続関数とし，十分大きな x に対し，$|f(x)| \leqq \dfrac{m}{x^{\lambda}}$ 　なる $M > 0$ 及び $\lambda > 1$ が存在すれば，広義積分

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx < \infty \quad \text{（収束する）}$$

同様に無限区間 $(-\infty,b]$ で連続関数とし，十分大きな x に対し，$|f(x)| \leqq \dfrac{m}{x^{\lambda}}$ なる $M' > 0$ 及び $\lambda > 1$ が存在すれば，広義積分

$$\int_{\infty}^b f(x)\,dx < \infty \quad \text{（収束する）}$$

まとめ：広義積分の値は右辺の極限値（収束条件をチェック！）

(1) $x=a$ が特異点のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

(2) $x=b$ が特異点のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

(3) $x=a,\ b$ が特異点のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

(4) 積分区間が無限のとき

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ R>0}} \int_a^R f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ R>0}} \int_{-R}^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ R>0}} \int_{-R}^R f(x)\,dx$$

例題 4.6. 次の広義積分の値を求めよ．

(1) $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\ (a<b) = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}} \overset{t=x-\frac{a+b}{2}}{=} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{dt}{\sqrt{(\frac{a-b}{2})^2-t^2}}$$
$$\overset{\alpha=\frac{b-a}{2}}{=} \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{\alpha^2-t^2}} = 2\int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2-t^2}} = 2\Big[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\alpha}\Big]_0^\alpha = 2\left(\mathrm{Sin}^{-1}1-\mathrm{Sin}^{-1}0\right) = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi$$

(2) $$\int_0^1 \frac{\log x}{x^a}\,dx\ \ (0<a<1) = \frac{1}{1-a}\Big[x^{1-a}\log x\Big]_0^1 - \frac{1}{1-a}\int_0^1 x^{-a}\,dx = -\frac{1}{1-a}\int_0^1 x^{-a}\,dx = -\frac{1}{(1-a)^2}$$

(3) $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \overset{t=\sqrt{1-x^2}}{=} \int_0^\infty \frac{tdt}{x}\frac{1}{xt} = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Tan}^{-1}x\Big]_0^\infty = \mathrm{Tan}^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

(4) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\Big[\mathrm{Sin}^{-1}x\Big]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\mathrm{Sin}^{-1}(1-\epsilon) = \mathrm{Sin}^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$$

(5) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty}\Big[\mathrm{Tan}^{-1}x\Big]_0^R = \lim_{R\to\infty}\mathrm{Tan}^{-1}R = \frac{\pi}{2}$$

（註） $4\sin x,\ \cos x,\ \tan x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x, \mathrm{Cos}^{-1}x, \mathrm{Tan}^{-1}x$（アーク・サイン，アーク・コサイン，アーク・タンジェント）については逆関数のセクションで解説する．

4.6　逆関数

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で開区間 (a,b) で微分可能とする．最大値・最小値の定理から

$$\min_{a \leqq x \leqq b} f(x) = \alpha,\ \ \max_{a \leqq x \leqq b} f(x) = \beta$$

とおくと，

$$\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$$

即ち，$f(x)$ の値域 $R(f)$, 定義域 $D(f)$ は

$$R(f) = [\alpha, \beta],\ D(f) = [a,b]$$

としてよい．このとき，

定義 4.4. $f(x)$ の逆関数とは

$$f(g(x)) \equiv x$$

を満たす連続関数 $g(x)$ をいい，$g(x) = f^{-1}(x)$ で表す．

注意 4.6. 関数とは変数 x に対して唯一つの値を対応させる規則のことであった．

- 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は関数なので変数 x に対して唯一つの値 $f^{-1}(x)$ が対応している．
- 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の変数 x は $f(x)$ の値域である区間 $[\alpha, \beta]$ を動き，$y = f^{-1}(x)$ の値域 $R(f^{-1})$ は $f(x)$ の定義域 $[a,b]$ 内に収まる．

$$\alpha \leqq x \leqq \beta \Longrightarrow a \leqq y = f^{-1}(x) \leqq b$$

例. (1) $y = \underline{f(x) = 2x+1}$ の逆関数 $g(x) = f^{-1}(x)$ は $f(g(x)) = x$ を満たす関数のこと．即ち

$$f(g(x)) = x \Longleftrightarrow f(g(x)) = 2g(x) + 1 = x \quad \therefore \quad g(x) = \underline{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1)}$$

(2) $y = \underline{f(x) = e^x}$ の逆関数 $g(x)$ は, まず，$y = f(x) = e^x$ の地域は $y > 0$ より $g(x)$ の定義域は $x > 0$ である．

$$f(g(x)) = x \Longleftrightarrow e^{g(x)} = x \quad \therefore \quad g(x) = \underline{f^{-1}(x) = \log x\ (x > 0)}$$

(3) $y = \underline{f(x) = \log x\ (x > 0)}$ の地域は $-\infty < y < \infty$ ゆえ $y = g(x) = f^{-1}(x)$ の定義域は $-\infty < x < \infty$ であり，

$$f(g(x)) = x \Longleftrightarrow \log g(x) = x \quad \therefore \quad g(x) = \underline{f^{-1}(x) = e^x}$$

(4) $y = f(x) = x^2$ の逆関数 $g(x)$ は $y = f(x) = x^2$ の値域は $y \geqq 0$ ゆえ，$g(x) = f^{-1}(x)$ の定義域は $x \geqq 0$.

$$f(g(x)) = x \Longleftrightarrow (g(x))^2 = x \quad \therefore \quad g(x) = \pm\sqrt{x}$$

逆関数は x に対して唯一つの値を取るので $g(x) = \pm\sqrt{x}$ の内の $g(x) = \sqrt{x}$ としても良いし，$g(x) = -\sqrt{x}$ としても良いが，便宜上，プラスの方の $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ を逆関数と定める．

命題 4.3. 関数 $y = f(x)$ の定義域 $a \leqq x \leqq b$ とし，値域 $\alpha \leqq y = f(x) \leqq \beta$ とする．今．$a < x < b$ に対し，$f'(x) > 0$ (または $f'(x) < 0$) と仮定する（このような関数 $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で単調な関数という）このとき，$f(x)$ の逆関数 $g(x) = f^{-1}(x)$ $(\alpha <$
$leqqx \leqq \beta)$ で $a < f^{-1}(x) < b$ となるものが唯一つ存在する．

証明. $f'(x) > 0$ より $f(x)$ は単調増加または単調減少関数．よって，平均値の定理より，特に，$f(x)$ は *1* 対 1，即ち，

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

今，$g_1(x), g_2(x)$ が $f(x)$ の逆関数ならば, $a < g_(x).g_2(x) < b$ かつ

$$f(g_1(x)) = f(g_2(x)) = x \quad \therefore \quad g_1(x) = g_2(x)$$

こうして, 存在すれば唯一つである．存在については, $f(x)$ の値域の任意の点 t_0 $(\alpha < t_0 < \beta$ に対して，$f(x_0) = t_0$ となる x_0 が $f(x)$ の単調性から唯一つ存在する．こうして，対応

$$t_0 \longrightarrow x_0 = g(t_0)$$

は関数である．この関数を $x = g(t)$ としても良いが，慣習上，$t \to x,\ x \to y$ と置いて，$y = g(x) = f^{-1}(x)$ と表すのである．

例題 4.7. （単調関数の例）

(1) $y = f(x) = \sin x$ は区間 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で単調な関数である．

実際，$f'(x) = \cos x > 0 \quad (-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2})$.

(2) $y = f(x) = \cos x$ は区間 $0 < x < \pi$ で単調な関数である．

実際，$f'(x) = -sinx < 0 \quad (0 < x < \pi)$.

(3) $y = f(x) = \tan x$ は区間 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で単調な関数である．

実際，$f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0 \quad (-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2})$.

こうして，$f(x) = \sin x, \cos x, \tan x$ の定義域を制限すればこれらの関数は定義域内で単調なので逆関数が存在する．

定義 4.5. (1) $y = \sin x \; (-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2})$ の逆関数を

$$y = \mathrm{Sin}^{-1}x \; (-1 < x < 1)$$

で表す．このとき，

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Sin}^{-1}x < \frac{\pi}{2}$$

(2) $y = \cos x \; (0 < x < \pi)$ の逆関数を

$$y = \mathrm{Cos}^{-1}x \; (-1 < x < 1)$$

で表す．このとき，

$$0 < \mathrm{Cos}^{-1}x < \pi$$

(3) $y = \tan x \; (-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2})$ の逆関数を

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}x \; (-\infty < x < \infty)$$

で表す．このとき，

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Tan}^{-1}x < \frac{\pi}{2}$$

（註）逆関数を扱う際はその定義域と地域を明記する必要がある．

4.7 逆関数の微分

関数 $g(x)=f^{-1}(x)$ を関数 $f(x)$ の逆関数とする．

命題 4.4. $f(x)$ が微分可能なら $g(x)$ も定義域内で微分可能である．

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))} \iff \left(f^{-1}(x)\right)' == \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

証明. 逆関数の微分可能性の証明は省略．

$f(g(x))=x$ より両辺を x で微分して（合成関数の微分法の適用）

$$f'(g(x))\cdot g'(x)=1 \quad \therefore \quad g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

$\square$

例題 4.8. (1) $\left(\mathrm{Sin}^{-1}(x)\right)'=\dfrac{1}{\cos(\mathrm{Sin}^{-1}(x))}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\left(\mathrm{Cos}^{-1}(x)\right)'=\dfrac{-1}{\sin(\mathrm{Cos}^{-1}(x))}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\left(\mathrm{Tan}^{-1}(x)\right)'=\dfrac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Tan}^{-1}(x))}=\dfrac{1}{1+x^2}$

逆三角関数の定義域と値域及び具体的な値

(1) $-1 \leqq x \leqq 1, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqq \mathrm{Sin}^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}, \quad \mathrm{Sin}^{-1}(-x)=-\mathrm{Sin}^{-1}x.$

$$\mathrm{Sin}^{-1}\,0=0, \quad \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}, \quad \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$$

(2) $-1 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq \mathrm{Cos}^{-1}x \leqq \pi, \quad \mathrm{Cos}^{-1}\,x+\mathrm{Cos}^{-1}(-x)=\pi$

$$\mathrm{Cos}^{-1}1=0, \quad \mathrm{Cos}^{-1}\,\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}, \quad , \quad \mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}, \quad \mathrm{Cos}^{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

(3) $-\infty < x < \infty, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Tan}^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}, \quad \mathrm{Tan}^{-1}(-x)=-\mathrm{Tan}^{-1}x$

$$\mathrm{Tan}^{-1}0=0,\ \mathrm{Tan}^{-1}\,1=\frac{\pi}{4},\ \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},\ \mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6},\ \mathrm{Tan}^{-1}\infty=\frac{\pi}{2}$$

(4) $\mathrm{Cos}^{-1}x+\mathrm{Sin}^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}.$

例題 4.9. (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\mathrm{Tan}^{-1}x+C$

$x = a\tan t$ とおくと，$dx = a(1+\tan^2 t)\,dt \quad , \quad t = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{a}$ より

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2(1+\tan^2 t)} = \int \frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2(1+\tan^2 t)}\,dt = \frac{1}{a}\cdot t = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}.$

実際，$x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\mathrm{Tan}^{-1}\frac{(x+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

5　偏微分法

5.1　２変数関数

定義 5.1. （領域の例）

- (x, y)-平面の矩形（長方形）とは

$$Q_0 = [a,b]\times[c,d] = \{a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$$

  の形の集合.

- 次の領域を点 (x_0, y_0) を中心とした矩形

$$Q_R(x_0,y_0) = \{|x-x_0| \leqq R,\ |y-y_0| \leqq R\}$$

- (x_0, y_0) 中心半径 R の円板

$$B_R(x_0,y_0) = \left\{(x,y)\ :\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leqq R^2\right\}$$

定義 5.2. $f(x,y)$ が点 (x_0,y_0) を中心とした矩形 $(x_0, y_0\ \ : R)$ で連続とは，極限値

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\neq(x_0,y_0)}} f(x,y) < \infty$$

が有限確定値として存在して

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\neq(x_0,y_0)}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

を満たすときをいう．

注意！

- $(x,y)\to(x_0,y_0)$ は (x,y) が (x_0,y_0) に近づき方によらずの意味あいが暗黙に含まれている．
- $(x,y)\to(x_0,y_0)$ ならば $x\to x_0$，$y\to y_0$ であるが，逆は正しくない．

  実際，$x\to x_0$，$y\to y_0$ は x は x-軸に沿って x_0 に近づき，y は y-軸に沿って y_0 に近づくことを意味する．

  しかし，$(x,y)\to(x_0,y_0)$ は平面上の点として (x,y) が (x_0,y_0) に近づくという意味なので，近づく方向が無限にあることを言外に含んでいる．即ち，

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0\\(x,y)\neq(x_0,y_0)}} \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\neq(x_0,y_0)}}$$

- $x = x_0 + r\cos\theta$，$y = y_0 + r\sin\theta$ と極座標で表すと

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\neq(x_0,y_0)}} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta) = f(x_0,y_0)\ (\theta\text{に無関係！})$$

例. 収束が近づく方向に依存する（もしくは依存しない）例．

(i)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^3\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\sin\theta = 0\ (\theta\text{ に依存していないので収束している})$$

(ii)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}\sin\theta\ (\theta\text{ に依存しているので収束しない})$$

$\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}$ の場合を考えると，次のようにしても示せる．

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\left(\lim_{\substack{y\to 0\\y\neq 0}}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = 1 \neq 0 = \lim_{\substack{y\to 0\\y\neq 0}}\left(\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

(iii)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\,\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\,\sin\theta \ (\theta \text{ に依存しているので収束しない})$$

5.2 偏微分

定義 5.3. $f(x,y)$ が矩形 $Q_R(x_0,y_0)$ で定義された（２変数）関数とする．次の左辺の極限値が存在するとき $f(x,y)$ は (x_0,y_0) で**偏微分可能**といい，その極限値をそれぞれ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ で表し，それらを $f(x,y)$ の (x_0,y_0) での**偏微分係数**という．即ち，

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) := f_x(x_0,y_0) < \infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k} =: \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) := f_y(x_0,y_0) < \infty \end{cases}$$

注意 5.1. (x,y) がベクトル $\mathbf{n}=(\mu,\nu)$ 方向から直線的に (x_0,y_0) に近づくときの次が収束するならば，その極限値を $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x_0,y_0)$ で表し，$\mathbf{n}=(\mu,\nu)$ 方向の**方向微分係数**という．即ち，

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+\mu t, y_0+\nu t)-f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x_0,y_0) = \mu\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \nu\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

特に，

$$\begin{cases} \bullet \quad \mathbf{n}=\mathbf{e}_1=(1,0) \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\[2ex] \bullet \quad \mathbf{n}=\mathbf{e}_2=(0,1) \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

例題 5.1. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & , \ (x,y)=(0,0) \\ \quad 0 & , \ (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$ は $(0,0)$ で偏微分可能だが $(0,0)$ で連続でない（$\underline{\text{１変数関数 } f(x) \text{ は微分可能ならば連続であった}}$）．

実際，$f(x,0)=f(0,y)=0$ より，

$$f_x(0,0) = \lim_{\substack{h\to 0\\h\neq 0}} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{\substack{k\to 0\\k\neq 0}} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

$$\therefore \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

こうして $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で偏微分可能である．

一方，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{2xy}{x^2+y^2} \overset{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta}{=} \lim_{r\to 0} \frac{2r^2\ \cos\theta\sin\theta}{r^2} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta \neq f(0,0) = 0$$

極限値が θ に依存している．こうして $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続ではない． □

定義 5.4. （偏導関数）２変数関数 $f(x,y)$ に対し以下の右辺の極限が有限確定するとき

$$\begin{cases} f_x(x,y) := \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\ \\ f_y(x,y) := \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} \end{cases}$$

を**偏導関数**という．

- ▶ $f_x(x,y)$ は $f(x,y)$ を x の関数と見て x で微分したもの．この場合，y は定数とみなす．
- ▶ $f_y(x,y)$ は $f(x,y)$ を y の関数と見て y で微分したもの．この場合，x は定数とみなす．

特に，偏導関数の (x_0,y_0) での値 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ を $f(x,y)$ の (x_0,y_0) での**偏微分係数**という．

5.3 全微分

注意 5.2.

▶ ２変数関数 $f(x,y)$ については (x_0,y_0) で偏微分可能だが (x_0,y_0) で連続でない例が存在した．そこで，「微分可能ならば連続である」を補償する新たな微分可能の概念として，１変数の場合の微分可能性の概念の自然な拡張として全微分可能性の概念を導入する

１変数の微分可能性の自然な拡張として前微分可能性の概念がある．
今，$f(x)$ が $x=x_0$ で微分可能であるとは

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{x-x_0} = 0 \text{ となる定数 } A \text{ が存在する}$$

即ち，

$$f(x) = f(x_0)+A(x-x_0)+o_1(|x-x_0|), \text{ 但し，} \lim_{x\to x_0} \frac{o_1(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0 \text{ となる定数 } A \text{ が存在する}$$

と言いかえることができる．このとき，$A=f'(x_0)$ である．そこで，２変数関数の微分可能性を次で定義する．

定義 5.5. $f(x,y)$ が $(x,y)=(x_0,y_0)$ で**全微分可能**であるとは

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$ を満たす定数 A, B ガ存在する

これは次のようにも表される．

$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+o_2(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$; を満たす定数 A, B ガ存在する

但し，

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{o_2(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

この定義から容易に

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x.y)=f(x_0,y_0)$$

を得る．これは，全微分可能性から連続が従うことを示している．今，$y=y_0$ とおけば

$$f(x,y_0)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2})$$

から

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

が従う．一方，$x=x_0$ とおいて

$$f(x,y)=f(x_0,y)+B(y-y_0)+o_2(\sqrt{(y-y_0)^2})$$

から

$$B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

が従う．以上より，

命題 5.1. (1) $f(x,y)$ が全微分可能ならば $f(x,y)$ は連続かつ偏微分可能である．

(2) $f(x,y)$ は偏微分可能でも連続とは限らない，従って，全微分可能とは限らない．

1変数・2変数の全微分

(i)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + o_1,\ \text{但し}\ \lim_{x \to x_0} \frac{o_1}{|x - x_0|} = 0$$

（註）1変数の全微分は通常の微分である．全微分の概念は2変数以上の関数に対して意味がある．

(ii)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o_2$$

但し，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{o_2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$

定義 5.6. （2変数関数のクラス）

- 関数 $f(x,y)$ が $\mathscr{C}^0$ クラスであるとは，$f(x,y)$ が連続関数のとき．
- 関数 $f(x,y)$ が $\mathscr{C}^1$ クラスであるとは，*1* 階偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ が連続関数のとき．
- 関数 $f(x,y)$ が $\mathscr{C}^2$ クラスであるとは, 2階偏導関数 $f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ が連続関数のとき．
- $\mathscr{C}^n$ クラス（$n \geqq 3$）以上については実用上あまり重要ではないのでこのノートでは割愛する．

但し，2階偏導関数は以下で定義される．

$$\begin{cases} f_{xx} = (f_x)_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, & f_{xy} = (f_x)_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \\ f_{yx} = (f_y)_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, & f_{yy} = (f_y)_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{cases}$$

注意 5.3. 2変数「$\mathscr{C}^n$クラス $\Longrightarrow \mathscr{C}^{n-1}$クラス $(n \leqq 2)$」

(1.1) 2変数 $\mathscr{C}^1 \Longrightarrow \mathscr{C}^0$

$(\because)$ 平均値の定理より

$$
\begin{aligned}
f(x+h,y+k)-f(x,y) &= \Big\{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)\Big\}+\Big\{f(x,y+k)-f(x,y)\Big\} \\
&= h\cdot f_x(x+\theta_1 h,y+k)+k\cdot f_y(x,y+\theta_2 k)
\end{aligned}
$$

を満たす $0<\theta_1,\theta_2<1$ が存在する．$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ の連続性から

$$
\begin{cases}
\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} h\,f_x(x+\theta_1 h,y+k)=0\times f_(x,y)=0 \\
\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} k\,f_y(x,y+\theta_2 k)=0\times f_y(x,y)=0
\end{cases}
$$

$$
\therefore\quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}(f(x+h,y+k)-f(x,y))=0
$$

よって，$f(x,y)$ は連続関数である． $\square$

(1.2) 2変数 $\mathscr{C}^2\Longrightarrow\mathscr{C}^1$.

$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ に対して (1.1) を適用する．

$$
\begin{aligned}
f_x(x+h,y+k)-f_x(x,y) &= \Big\{f_x(x+h,y+k)-f_x(x,y+k)\Big\}+\Big\{f_x(x,y+k)-f_x(x,y)\Big\} \\
&= h\cdot f_{xx}(x+\theta_1 h,y+k)+k\cdot f_{xy}(x,y+\theta_2 k)\cdots ①
\end{aligned}
$$

を満たす $0<\theta_1,\theta_2<1$ が存在する．

$$
\begin{aligned}
f_y(x+h,y+k)-f_y(x,y) &= \Big\{f_y(x+h,y+k)-f_y(x,y+k)\Big\}+\Big\{f_y(x,y+k)-f_y(x,y)\Big\} \\
&= h\cdot f_{xy}(x+\theta_1' h,y+k)+k\cdot f_{yy}(x+\theta_2' k)\cdots ②
\end{aligned}
$$

を満たす $0<\theta_1',\theta_2'<1$ が存在する．① の右辺は $f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$ が連続なので

$(h,k)\to(0,0)$ のとき，（右辺）$\to 0\times f_{xx}+0\times f_{xy}=0$ に収束する．

② の右辺も $f_{yx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ の連続性から

$(h,k)\to(0,0)$ のとき，（右辺）$\to 0\times f_{yx}+0\times f_{yy}=0$ に収束する．

$$
\therefore\quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\Big\{f_x(x+h,y+k)-f_x(x,y)\Big\}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\Big\{f_y(x+h,y+k)-f_y(x,y)\Big\}=0
$$

を得る．これは $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ の連続性を示す． $\square$

命題 5.2. 関数 $f(x,y)$ が $\mathscr{C}^1$ クラスならば，$f(x,y)$ は全微分可能である．

証明. $(x,y)=(x_0,y_0)$ で全微分可能であることを示そう.

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) &= f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)+\Big\{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)\Big\} \\
&= hf_x(a+\theta_1 h,b+k)+k\varphi_y(a,b+\theta_2 k) \\
&= hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+o_1(h,k) \\
\text{但し，} o_1(h,k) &= h\Big\{f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a,b)\Big\}+k\Big\{\varphi_y(a,b+\theta_2 k)-f_y(a,b)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{o_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\leqq \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big|f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a,b)\Big|+\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big|f_y(a,b+\theta_2 k)-f_y(a,b)\Big| \\
&\leqq \Big|f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a,b)\Big|+\Big|f_y(a,b+\theta_2 k)-f_y(a,b)\Big| \overset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0+0=0 \\
(\because) &\quad f_x,\ f_y \text{ の連続性から} \\
&\quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\{f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a,b)\}=0, \\
&\quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\{f_y(a,b+\theta_2 k)-f_y(a,b)\}=0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{o_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0
$$

こうして，$f(x,y)$ は $(x,y)=(x_0,y_0)$ で全微分可能であることが示された. □

例題 5.2.

$$
f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0) \end{cases}
$$

に対し，$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ であることを示せ.

実際,

$$
\begin{cases} f_x(0,y)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to0}y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}=-y \quad \therefore \quad f_x(0,0)=0 \\ f_y(x,0)=\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=\lim_{k\to0}x\frac{x^2-k^2}{x^2+k^2}=x \quad \therefore \quad f_y(0,0)=1 \end{cases}
$$

$$
\therefore \begin{cases} f_{xy}(0,0)=(f_x)_y(0,0)=\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\theta00}\frac{-k}{k}=-1 \\ f_{yx}(0,0)=(f_y)_x(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1 \end{cases}
$$

$$
\therefore \quad f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)
$$

上記の例で見るように一般には $f_{xy}(x,y)\neq f_{yx}(x,y)$ である.

命題 5.3. $f(x,y)$ が $\mathscr{C}^2$ クラスならば

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

が成立する．

証明. 定義域内の任意の $(x,y)=(a,b)$ に対し $\varphi(x)=f(x,b+k)-f(x,b)$ とおく．平均値の定理から $<\theta_1,\ \theta_2<1$ が存在して

$$\begin{aligned}
\varphi(x+h)-\varphi(x) &= h\varphi'(x+\theta_1 h,b+k)=h\left\{f_x(x+\theta_1 h,b+k)-f_x(x+\theta_1 h,b)\right\}\\
&= hkf_{xy}(x+\theta_1 h,b+\theta_2 k)\\
\varphi(x+h)-\varphi(x) &= f(x+h,b+k)-f(x+h,b)-\left\{f(x,b+k)-f(x,b)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad f_{xy}(x+\theta_1 h,b+\theta_2 k) &= \frac{\Big\{f(x+h,b+k)-f(x+h,b)\Big\}-\Big\{f(x,b+k)-f(x,b)\Big\}}{hk}\\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{\Big\{f(x+h,b+k)-f(x+h,b)\Big\}}{k}-\frac{\Big\{f(x,b+k)-f(x,b)\Big\}}{k}\right)
\end{aligned}$$

まず，両辺 $k\to 0$ として

$$f_{xy}(x+\theta_1 h,b)=\frac{1}{h}\left(f_y(x+h,b)-f_y(x.b)\right)$$

次に $h\to 0$ として

$$f_{xy}(x,b)=f_{yx}(x,b)\qquad\therefore\quad f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

□

5.4　２変数合成関数の偏微分法

命題 5.4 (合成関数の偏微分公式)**.** $f(x,y)$ を偏微分可能とする

(1) $x=\varphi(u),\ y=\phi(u)$ を微分可能な関数とするとき，とするとき，$f(\varphi(u),\phi(u))$ を u の関数 $g(u)=f(\varphi(u),\phi(u))$ として u で微分すれば

$$\therefore\quad g'(u)=\frac{dg}{du}=\frac{df}{du}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d\varphi}{du}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d\phi}{du}\quad\cdots 1$$

(2) $x=\varphi(u,v),\ y=\phi(u,v)$ を偏微分可能な関数とする．そのとき，$f(\varphi(u,v),\phi(u,v))$ は u,v の関数として偏微分すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial u} \quad \cdots ② \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial v} \quad \cdots ③\end{aligned}$$

偏微分作用素 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial u}\ ,\ \dfrac{\partial}{\partial v}\right\}$ と $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\ ,\ \dfrac{\partial}{\partial x}\right\}$ の間の関係式は次で与えられる：

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}\\ \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi}{\partial u}\\ \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}$$

証明. (2) の証明には公式 (1) を適用する．実際，$f(\varphi(u,v),\phi(u,v))$ を u のみの関数として u で微分すれば (1) の結果より②が得られ，$f(\varphi(u,v),\phi(u,v))$ を v のみの関数として v で微分すれば③が得られる．その際，この場合は微分でなく偏微分なので

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{du}\longrightarrow\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \dfrac{d\phi}{du}\longrightarrow\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\end{cases} \qquad \text{及び} \qquad \begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dv}\longrightarrow\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \dfrac{d\phi}{dv}\longrightarrow\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\end{cases}$$

と置き換える必要がある．

(1) の証明のイメージ：$g(u+h)-g(u)=f(\varphi(u+h),\phi(u+h))-f(\varphi(u),\phi(u))$. そこで，$\varphi(u+h)-\varphi(u)=\Delta_1$,　$\phi(u+h)-\phi(u)=\Delta_2$ とおく．その時,

$$\varphi(u+h)=\varphi(u)+\Delta_1\ ,\quad \phi(u+h)=\phi(u)+\Delta_2$$

より，

$$\begin{aligned}g(u+h)-g(u) &= f(\varphi(u+h),\phi(u+h))-f(\varphi(u),\phi(u))=f(\varphi(u)+\Delta_1,\phi(u)+\Delta_2)-f(\varphi(u),\phi(u))\\ &= \Big\{f(\varphi(u)+\Delta_1,\phi(u)+\Delta_2)-f(\varphi(u),\phi(u)+\Delta_2)\Big\}+\Big\{f(\varphi(u),\phi(u)+\Delta_2)-f(\varphi(u),\phi(u))\Big\}\\ &= \Delta_1\, f_x(\varphi(u)+\theta_1\Delta_1,\phi(u)+\Delta_2)+\Delta_2\, f_y(\varphi(u),\phi(u)+\theta_2\Delta_2)\\ \frac{g(u+h)-g(u)}{h} &= \frac{\Delta_1}{h}\,\varphi_x(\varphi(u)+\theta_1\Delta_1,\phi(u)+\Delta_2)+\frac{\Delta_2}{h}\,f_y(\varphi(u),\phi(u)+\theta_2\Delta_2)\end{aligned}$$

そこで $h\to 0$ とすると，左辺は $g'(u)$ であり，右辺は $\lim\limits_{h\to}\Delta_1=\lim\limits_{h\to 0}\Delta_2=0$ に注意すれば

$$\begin{aligned}g'(u) &= \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_1}{h}\lim_{h\to 0}\Big\{\varphi_x(\varphi(u)+\theta_1\Delta_1,\phi(u)+\Delta_2)\Big\}+\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_2}{h}\lim_{h\to 0}\Big\{f_y(\varphi(u),\phi(u)+\theta_2\Delta_2)\Big\}\\ &= \frac{d\varphi}{du}\cdot f_x(\varphi(u),\phi(u))+\frac{d\phi}{du}\cdot f_y(\varphi(u),\phi(u))\end{aligned}$$

□

例題 5.3. 次の関数の偏導関数を求めよ．

(1) $f = \sin(x^2+y^2) \quad \therefore \quad f_x = 2x\cos(x^2+y^2),\ f_y = 2y\cos(x^2+y^2)$

(2) $f = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \therefore \quad f_x = \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y = \dfrac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

(3) $f = \sin^{-1}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \therefore \quad f_x = \dfrac{\pm 2x}{x^2+y^2}, \quad f_y = \dfrac{\mp 2x}{x^2+y^2}$

(4) $f = \log(1+x^2+y^3) \quad \therefore \quad f_x = \dfrac{2x}{1+x^2+y^3}, \quad f_y = \dfrac{3y^2}{1+x^2+y^3}$

(5) $f = e^{\sqrt{x^2+y}} \quad \therefore \quad f_x = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y}}\ e^{\sqrt{x^2+y}}, \quad f_y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y}}\ e^{\sqrt{x^2+y}}$

（註）(2) に関して：

$$\left(\mathrm{Sin}^{-1}g(x)\right)' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}},\ \left(\mathrm{Cos}^{-1}g(x)\right)' = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}},\ \left(\mathrm{Tan}^{-1}g(x)\right)' = \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$$

6　２変数極値問題

6.1　２変数テーラーの定理

関数 $f(x,y)$ を $\mathscr{C}^3$ クラスとする．そのとき，$(x,y)=(x_0,y_0)$ に対し

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+\frac{1}{2!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+R_3(x,y:x_0,y_0)$$

が成立する．

但し，

$$\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{R_3(x,y:x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

または

$$\begin{aligned}
f(x,y)-f(x_0,y_0) &= (x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0)\\
&+ \frac{1}{2!}\Big\{(x-x_0)^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy}(x_0,y_0)+(y-y_0)^2 f_{yy}(x_0,y_0)\Big\}\\
&+ R_3(x,y:x_0,y_0)
\end{aligned}$$

証明. $g(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)$ とおく．$g(t)$ に t の関数として $t = 0$ でのテーラーの定理を適用すると，

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2!}g''(0)t^2 + R_3(t;\theta)$$

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{3!}g^{(3)}(\theta)t^3 \ (0 < \theta < 1)$$

を得る．今，合成関数の偏微分の公式から

$$\begin{aligned}
g'(0) &= (x - x_0)f_x + (y - y_0)f_y \quad \therefore \quad g'(0) = (x - x_0)f_(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) \\
g''(0) &= (x - x_0)\left\{(x - x_0)f_{xx} + (y - y_0)f_{xy}\right\} + (y - y_0)\left\{(x - x_0)f_{yx} + (y - y_0)f_{yy}\right\} \\
&= (x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)f_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0) \\
R_3(t, \theta) &= \frac{1}{3!}g^{(3)}(\theta t)t^3 = \frac{t^3}{6}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\left(x_0 + \theta t(x - x_0), y_0 + \theta t(y - y_0)\right)
\end{aligned}$$

$t = 1$ とおくと，$g(1) = f(x, y)$ ゆえ

２変数テーラーの定理

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{1}{2}\Big((x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)f_{xy}(x_0.y_0)\Big) + R_3 \\
R_3 &= \frac{1}{3!}\Big\{(x - x_0)^3 f_{xxx}(\boldsymbol{\Theta}) + 3(x - x_0)^2(y - y_0)f_{xxy}(\boldsymbol{\Theta}) \\
&+ 3(x - x_0)(y - y_0)^2 f_{xyy}(\boldsymbol{\Theta}) + (y - y_0)^3 f_{yyy}(\boldsymbol{\Theta})\Big\} \\
\boldsymbol{\Theta} &= \big(x_0 + \theta(x - x_0)\ ,\ y_0 + \theta(y - y_0)\big)
\end{aligned}$$

を得る．剰余項 R_3 は $(x, y) \to (x_0, y_0)$ のとき，限りなく 0 に近い．即ち，

$$\Big|R_3\Big| \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

このこと及び実数の連続性から

命題 6.1. 2 変数連続関数 $F(x, y)$ に対し，変数 (x, y) が (x_0, y_0) に限りなく近いならば

$$F(x, y) > 0 \Longrightarrow F(x, y) + R_3(x, y : x_0, y_0) > 0$$

が成り立つ．

6.2　２変数極値問題

関数 $f(x,y)$ は少なくとも $\mathscr{C}^3$ クラスとする．このとき，

定義 6.1. 平面の点 $(x,y)=(x_0,y_0)$ が関数 $f(x,y)$ の極小値（または極大値）であるとは (x_0,y_0) に十分近い（限りなく近い）(x,y) に対し

$$f(x,y) \geqq f(x_0,y_0) \quad \Big(\text{または，} f(x,y) \leqq f(x_0,y_0)\Big)$$

但し，等号は $(x,y)=(x_0,y_0)$ のときに限る．極大値または極小値を極値という．

命題 6.2 (極値であるための必要条件)**.** $f(x_0,y_0)$ が極値ならば, または，$f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値を取るとすれば,

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$$

である．

証明. 極小値の場合には，$f(x_0,y_0)$ が極小値より，十分小さな $h>0$ に対して,

$$f(x_0 \pm h, y_0) \geqq f(x_0,y_0)$$

よって

$$\pm f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 \pm h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \geqq 0 \quad \therefore \quad f_x(x_0,y_0) = 0$$

一方，極大値の場合は，十分小さな $h>0$ に対して，

$$f(x_0 \pm h, y_0) \leqq f(x_0,y_0)$$

よって，

$$\pm f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 \pm h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \leqq 0 \quad \therefore \quad f_x(x_0,y_0) = 0$$

□

注意 6.1. 連立方程式 $f_x(x,y)=0=f_y(x,y)=0$ の解 $(x,y)=(x_0,y_0)$ は極値を与える一つの候補であるが， 以下の例にあるように $f_x=f_y=0$ の解が必ずしも極値を与えるとは限らない.

例. $f(x,y)=x^3y^2$ に対し，$f_x=f_y=0$ の解は $(x,y)=(0,0)$．しかし，$f(0,0)=0$ は極値でない．実際,

$$0=f(0,0)\leqq f(-h,h)=-h^5<0,\quad 0=f(0,0)\geqq f(h,h)=h^5>0$$

より不都合である． □

次に $f(x_0,y_0)$ が極値であるための十分条件について考察する．２変数テーラーの定理により

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) &= f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\ &+ \frac{1}{2}\Big\{f_{xx}(x-x_0)^2+2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big\}+R_3\\ &\text{但し，}\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\Big|R_3\Big|=0 \end{aligned}$$

$f(x_0,y_0)$ が極値より $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. よって,

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\Big\{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big\}+R_3$$

そこで,

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f_{yy}(x_0,y_0)$$

とおくと

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\Big\{A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2\Big\}+R_3$$

ここで，命題 2.1 より

$$A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2>0\quad(\text{or}\ <0)$$

ならば,(x_0,y_0) に限りなく近い (x,y) に対して

$$A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2+R_3>0\quad(\text{or}\ <0)$$

であった．

絶対不等式（高校数学 1）

２次式 ax^2+bx+c が全ての実数 x に対して

$$ax^2+bx+c>0\quad(ax^2+bx+c<0)\overset{\text{必要十分}}{\Longleftrightarrow} a>0\ (a<0)\ \text{かつ判別式}\ D:=b^2-4ac<0$$

このことから，(x_0, y_0) に限りなく近い (x, y) に対して

$$A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2+R_3>0 \quad (\text{or } <0) \Longleftrightarrow A>0 \quad (A<0)\ \&B^2-AC<0$$

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0)>0 &\Longleftrightarrow A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2>0 \\ &\Longleftrightarrow A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2+R_3>0 \quad \text{if } (x,y)\fallingdotseq(x_0,y_0) \\ &\Longleftrightarrow A>0\ \&\ B^2-AC<0 \end{aligned}$$

定理 6.1. 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，

(1) $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 　かつ

(2) $f_{xx}(x_0, y_0) > 0\ \&\ \Big(f_{xy}(x_0, y_0)\Big)^2 - f_{xx}(x_0, y_0)\cdot f_{yy}(x_0, y_0) < 0$

$\Longrightarrow f(x_0, y_0)$ は極小値.

一方，

(1') $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 　かつ

(2') $f_{xx}(x_0, y_0) < 0\ \&\ \Big(f_{xy}(x_0, y_0)\Big)^2 - f_{xx}(x_0, y_0)\cdot f_{yy}(x_0, y_0) < 0$

$\Longrightarrow f(x_0, y_0)$ は極大値.

極値を求める手順

(1) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ の解を求める.

(2) (1) で求めた解 (x_0, y_0) に対して

$$A = f_{xx}(x_0, y_0),\ B = f_{xy}(x_0, y_0),\ C = f_{yy}(x_0, y_0) \quad \text{と置いたとき，}$$

$$\begin{cases} A>0\ \&\ B^2-AC<0 \Longrightarrow f(x_0,y_0)\ \text{は極小値} \\ A<0\ \&\ B^2-AC<0 \Longrightarrow f(x_0,y_0)\ \text{は極大値} \\ \qquad B^2-AC=0 \qquad \Longrightarrow \text{極値の判定はできない} \end{cases}$$

6.3 条件付き極値問題（ラグランジュの未定乗数法）

問題：$g(x, y) = 0$ を満たす (x, y) に対し関数 $f(x, y)$ の最大値・最小値を求めよ.
または，$g(x, y) = 0$ という制限の下での関数 $f(x, y)$ の最大値・最小値を求めよ.

例題 6.1. $x^2+y^2=1$ を満たす (x,y) に対し，$f(x,y)=xy$ の最大値・最小値を求めよ．

解 1：$x=\cos t,\ y=\sin\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ とパラメータ表示する．このとき，

$$\varphi(t)=f(\cos t,\sin t)=\sin t\cos t=\frac{\sin 2t}{2}\qquad \varphi'(t)=\varphi'(t)=\cos 2t=2cos^2t-1$$

よって，$\varphi'(t)=0$ の解は $\cos^2 t=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\quad t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}$ 最大値は $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$, 最小値は $\varphi\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

解 2：$x^2+y^2=1$ から $y=\pm\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqq x\leqq 1)$（陰関数）を得る．

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$ の場合：

$$\varphi(x)=f(x,y)=xy=x\sqrt{1-x^2}\qquad\therefore\qquad \varphi'(x)=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$$

よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 最大値 $\varphi(\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$. $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 最小値 $\varphi(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $y=-\sqrt{1-x^2}$ の場合：

$$\varphi(x)=f(x,y)=xy=-x\sqrt{1-x^2}\qquad\therefore\qquad \varphi'(x)=-\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$$

よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 最小値 $\varphi(\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$. $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 最大値 $\varphi(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

□

注意 6.2. 上記例題のように $g(x,y)=0$ が曲線を描きパラメータ表示できれば条件付き最大値・最小値問題は高校数学の範疇で解決できる．それでは，パラメータ表示が困難な場合はどうすれば良いか．これに応えるのが**陰関数の定理**であり，**ラグランジュの未定乗数法**なのである．上記の**解 2** を一般化したものがラグランジュの未定乗数法による最大値・最小値の求め方である．

定理 6.2 (ラグランジュ).　2 変数関数 $f(x,y)$ 及び $g(x,y)$ は $\mathscr{C}^1$ クラスとする．

今，$g(x,y)=0$ で定義される (x,y)-平面内の曲線

$$C=\{(x,y)\ :g(x,y)=0\}$$

上の点 (a,b) に対し

(i) $\Big(g_x(a,b),g_y(a,b)\Big)\neq(0,0)$

(ii) $f(x,y)$ が (a,b) で極値をとる．

と仮定する．そのとき，定数 λ が存在して

$$\begin{cases} f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) - \lambda g_y(a,b) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．

注意 6.3. ▶ 定理 *6.2* は 2 変数関数 $f(x,y)$ を C に制限した C 上の関数 $f(x,y)\big|_C$ が C 上の点 (a,b) で極値をもつための必要条件についての主張である．

▶ 仮定 $\Big(g_x(a,b), g_y(a,b)\Big) \neq (0,0)$ は曲線 C が (a,b) で接線が引けることを意味する（即ち，曲線 C は点 (a,b) で滑らかという事）

関数 $f(x,y)$ が曲線 $C = \{g(x,y) = 0\}$ の滑らかな点 $(a,b) \in C$ で極値をとるならば，ある定数 λ が存在して，

$$\begin{cases} g(a,b) = 0 \\ f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) - \lambda g_y(a,b) = 0 \end{cases}$$

を満たす．上記の関係式を満たす (a,b) が $f(x,y)$ の極値の候補になる．即ち，連立方程式

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

の解が極値の候補になるということである．

▶ 定理 *6.2* の証明には「**陰関数定理**」が必要である．

陰関数定理（証明は他書に譲る）

$g(x,y)$ を (a,b) を含むある領域で $\mathscr{C}^2$ クラスとする．次の仮定をおく：

$$g(a,b)=0,\quad g_y(a,b)\neq 0$$

そのとき，$x=a$ の近傍で定義された $\mathscr{C}^2$ クラスの関数 $y=\varphi(x)$ で

(i) $g(x,\varphi(x))\equiv 0$ (恒等的に 0) かつ $g_y(x.\varphi(x))\neq 0$ (決して 0 にならない)

(ii) $b=\varphi(a)$

を満たすものがただ一つ存在する．特に，

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

$g(a,b)=0,\quad g_x(a,b)\neq 0$ の場合は $y=b$ の近傍で定義された $\mathscr{C}^2$ クラスの関数 $x=\phi(y)$ で

(i) $g(\phi(y),y)\equiv 0$ (恒等的に 0) かつ $g_y(\phi(y),y)\neq 0$ (決して 0 にならない)

(ii) $a=\phi(a)$

を満たすものがただ一つ存在する．特に，

$$\phi'(y)=-\frac{f_y(\phi(y),y)}{f_y(\phi(y),y)}$$

注意 6.4. 陰関数定理の主張は関数 $g(x,y)$ の零点集合

$$C:\{(x,y)\ :\ g(x,y)=0\}$$

上の滑らかな点 $(a,b)\in C$ に対して (a,b) の矩形近傍（長方形近傍）

$$Q(a,b)=(a-\epsilon,a+e)\times(b-\epsilon,b+\epsilon)$$

と C との共通部分 $Q(a,b)\cap C$ はある関数 $y=\varphi(x)$ のグラフと一致していることを主張している．

$$Q(a,b)\cap\{g(x,y)=0\}=Q(a,b)\cap\{y=\varphi(x)\}$$

大雑把に言えば，曲線の一部が関数のグラフとして表されることを示している．

（註）陰関数の定理の証明に中間値の定理を適用する．

定理 6.2 の証明：

$g(a,b)=0,\quad g_y(a,b)\neq 0$ より，$g_y(a,b)\neq 0$ とすると，$g_y(x,y)$ の連続性から点 (a,b) のある矩形近傍 $Q(a,b)=(-\delta+a,a+\delta)\times(-\delta+b,b+\delta)$ で $g_y(x,y)\neq 0$ とできる．また，陰関数の定理から $x=a$ の近傍で定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ が存在して

$$\begin{cases} g(x,\varphi(x))\equiv 0 \cdots ① \\ b=\varphi(a) \qquad\cdots ② \end{cases}$$

を満たす．① の両辺を x で微分して

$$g_x(x,y)+g_y(x,y)\cdot\varphi'(x)\equiv 0 \quad \therefore \quad g_x(a,b)+g_y(a,b)\cdot\varphi'(a)=0 \quad \therefore \quad \varphi'(a)=-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\cdots ③$$

$f(x,y)$ が (a,b) $(b=\varphi(a))$ で極値をもつことから，$h(x)=f(x,\varphi(x))$ は $x=a$ で極値をもつ．

$$h'(x)=f_x(x,y)+f_y(x,y)\cdot\varphi(x)\cdots ④$$

より

$$h'(a)=f_x(a,b)+f_y(a,b)\varphi'(a)=0\cdots ⑤$$

を得る．③を⑤に代入して，

$$f_x(a,b)+f_y(a,b)\left(-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\right)=0 \quad \therefore \quad \frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)}=\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}:=\lambda$$

とおくと，最終的には

$$\begin{cases} g(a,b)=0 \\ f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0 \end{cases}$$

を得る． □

ラグランジュ未定乗数法（定理 2.2）で求めた解 $(a,,b)\in C$ が $f(x,y)$ の極値の候補であるが，$f(a,b)$ が極大値または極小値であるための条件について考察する．

定理 6.3. 2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ を $\mathscr{C}^2$ クラスとする．そのとき, 曲線 $C:\{g(x,y)=0\}$ 上の点 $(a,b)\in\mathbb{C}$ が

$$\begin{cases} g(a,b)=0\ , \quad (g_x(a,b),g_y(a,b))\neq(0,0) \\ f_x(a,b)-\mathrm{lg}_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0 \end{cases}$$

を満たすならば,

$$\begin{cases} A=f_{xx}(a,b)-\lambda g_{xx}(a,b) \\ H=f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xy}(a,b) \\ B=f_{yy}(a,b)-\lambda g_{yy}(a,b) \end{cases}$$

とおくとき，

$$\Delta = Ag_y(a,b)^2 - 2Hg_x(a,b)g_y(a,b) + Bg_x(a,b)^2$$

に対し，

(i) $\Delta(a,b) < 0 \Longrightarrow f(a,b)$ は極大値

(ii) $\Delta(a,b) > 0 \Longrightarrow f(a,b)$ は極小値

(iii) $\Delta(a,b) = 0$ のときは極値の判定はできない．

証明. $g_y(a,b) \neq 0$ と仮定する．陰関数の定理から，関数 $y = \varphi(x)$ が存在して

$$b = \varphi(a), \quad g(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

を満たす．これを x で 2 回微分すると

$$g_{xx}(x,y) + 2g_{xy}(x,y)\varphi'(x) + g_{yy}(x,y)\varphi'(x)^2 + g_y(x,y)\varphi''(x) \equiv 0$$

$$\therefore \quad \varphi''(a) = -\frac{g_{xx}(a,b) + 2g_{xy}(a,b)\varphi'(a) + g_{yy}(a,b)\varphi'(a)^2}{g_y(a,b)} \cdots ①$$

そこで，(a,b) の近傍で $C = \{(x,y) \ : \ y = \varphi(x)\}$ と表されることに注意する．そのとき，
$h(x) = f(x,y)\Big|_C = f(x,\varphi(x))$ とおくと，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot \varphi(x) \\ h''(x) &= f_{xx}(x,y) + 2f_{xy}(x,y)\varphi'(x) + f_{yy}(x,y)\varphi'(x)^2 + f_y(x,y)\varphi''(x) \\ \Big(\ h''(a) &= f_{xx}(a,b) + 2f_{xy}(a,b)\varphi'(a) + f_{yy}(a,b)\varphi'(a)^2 + f_y(a,b)\varphi''(a) \cdots ② \ \Big) \end{aligned}$$

今，$f(a,b)$ が極値より $f_(a,b) = f_y(a,b) = 0 \quad \therefore \quad \underline{h'(a) = 0}$.
①における $\varphi''(a)$ を②に代入して

$$\begin{aligned} h''(a) &= f_{xx}(a,b) + 2f_{xy}(a,b)\varphi'(x) + f_{yy}(a,b)\varphi'(a)^2 \\ &- \frac{1}{g_y(a,b)}\Big\{g_{xx}(a,b)f_y(a,b) + 2g_{xy}(a,b)f_y(a,b)\varphi'(a) + g_{yy}(a,b)f_y(a,b)\varphi''(a)^2\Big\} \\ &= \frac{1}{g_y(a,b)}\Big\{\Big(f_{xx}(a,b)g_y(a,b) + 2f_{xy}(a,b)g_y(a,b)\varphi'(x) + f_{yy}(a,b)g_y(a,b)\varphi'(a)^2\Big) \\ &- \Big(g_{xx}(a,b)f_y(a,b) + 2g_{xy}(a,b)f_y(a,b)\varphi'(a) + g_{yy}(a,b)f_y(a,b)\varphi''(a)^2\Big)\Big\} \\ h''(a)g_y(a,b) &= \Big\{\Big(f_{xx}(a,b)g_y(a,b) - g_{xx}(a,b)f_y(a,b)\Big) + 2\Big(f_{xx}(a,b)g_y(a,b) - g_{xy}(a,b)f_y(a,b)\Big)\varphi'(a) \\ &+ \Big(f_{yy}(a,b)g_y(a,b) - g_{yy}(a,b)f_y(a,b)\Big)\varphi'(a)^2\Big\} \end{aligned}$$

今，$f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0$ より，$f_y(a,b)=\lambda g_y(a,b)$

$$\begin{aligned}
h''(a)g_y(a,b) &= g_y(a,b)\Big\{\Big(f_{xx}(a,b)-\lambda g_{xx}(a,b)\Big)+2g_y(a,b)\Big(f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xx}(a,b)\Big)\varphi'(a)\\
&+ g_y(a,b)\Big(f_{yy}(a,b)-\lambda g_{yy}(a,b)\Big)\varphi'(a)^2\Big\}\\
&= g_y(a,b)\Big(A+2H\varphi'(a)+B\varphi'(a)^2\Big)\\
\therefore\ h''(a) &= A+2H\varphi'(a)+B\varphi'(a)^2
\end{aligned}$$

$\varphi'(a)=-\dfrac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$ より

$$g_y(a,b)^2h''(a)=Ag_y(a,b)^2-2Hg_x(a,b)g_y(a,b)+Bg_x(a,b)^2=\Delta$$

こうして，

$$\begin{cases}
h''(a)>0 \Longleftrightarrow \Delta>0 \quad \therefore \quad h(a)=f(a,\varphi(a))=f(a,b)\ \text{は極小値}\\
h''(a)<0 \Longleftrightarrow \Delta<0 \quad \therefore \quad h(a)=f(a,\varphi(a))=f(a,b)\ \text{は極大値}
\end{cases}$$

□

例題 6.2 (高校数学の定番)．点 (x,y) が楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上を動くとき，xy の最大値を求めよ．

解 1. 与えられた楕円は $\begin{cases} x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ とパラメータ表示される．

$$\therefore \quad xy=2\cos t\,\sin t=\sin 2t\leqq 1 \quad \text{等号は}\ t=\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}$$

解 2. 点 (x,y) が $g(x,y)=\dfrac{x^2}{4}+y^2-1=0$ で定義される曲線（この場合は楕円）上を動くとき，２変数関数 $f(x,y)=xy$ の最大値をラグランジュの未定乗数法で求める．

$$\begin{cases}
① \quad g(x,y)=0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2}{4}+y^2-1=0\\
② \quad f_x(x,y)-\lambda g_x(x,y)=0 \Longleftrightarrow y-\lambda\cdot\dfrac{x}{2}=0\ \therefore\ 2y=\lambda x\\
③ \quad f_y(x,y)-\lambda g_y(x,y)=0 \Longleftrightarrow x-\lambda\cdot 2y=0\ \therefore\ x=\lambda(2y)
\end{cases}$$

よって，

$$x=2\lambda\cdot y=2\lambda\cdot\frac{\lambda x}{2}=x\lambda^2 \quad \therefore \quad (\lambda^2-1)x=0 \quad \therefore \quad x=0 \quad \text{or} \quad \lambda=\pm 1$$

今，$x=0$ ならば $y=0$ となり①を満たさないので除外され，$\lambda=\pm1$ を得る．

(i) $\lambda = 1$ ならば　①,②,③より，$(x, y) = \left(\pm\sqrt{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 一方,

$$\begin{cases} A(x,y) = f_{xx}(x,y) - \lambda g_{xx} = 0 - \dfrac{1}{2}\lambda = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ H(x,y) = f_{xy} - \lambda\, g_{xy} = 1 - \lambda\, 0 = 1 \\ B(x,y) = f_{yy} - \lambda\, g_{yy} = 0 - 2\,\lambda = -2\,\lambda \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \Delta(x,y) &= A \cdot g_y(x,y)^2 - 2H \cdot g_x(x,y) \cdot g_y(x,y) + B \cdot g_x(x,y)^2 \\ &= A\,(2y)^2 - 2H\,(xy) + B\,x^2 = -2\lambda y^2 - 2xy - \frac{\lambda}{2}\,x^2 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2y^2 \end{aligned}$$

こうして

$\Delta(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -4 < 0,\ \Delta(\sqrt{2}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 4 > 0,\ \Delta(-\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 4 > 0,\ \Delta(-\sqrt{2}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -4 < 0$

故に，$(x, y) = \left(\pm\sqrt{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき $\Delta < 0$ よりで極大値（この場合最大値）

$$f\left(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

をとる.

(ii) $\lambda = -1$ ならば $x = -2y$ より $(x, y) = \left(\pm\sqrt{2}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. このとき，$\Delta > 0$ より，極小値（この場合最小値）

$$f\left(\pm\sqrt{2}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

をとる.

□

例題 6.3. 点 (x, y) が $x^3 + y^3 = 6xy$ 上を動くとき，$x^2 + y^2$ の極値を求めよ.

解. この極値問題の解答は高校数学の範囲では困難と思われるので，ラグランジュの未定乗数法による解答例を与える．$g(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$ とおく.

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 & \Longleftrightarrow & x^3 + y^3 = 6xy \quad \cdots ① \\ f_x - \lambda g_x = 0 & \Longleftrightarrow & 2x = 3\lambda(x^2 - 2y) \cdots ② \\ f_y - \lambda g_y = 0 & \Longleftrightarrow & 2y = 3\lambda(y^2 - 2x) \cdots ③ \end{cases}$$

② $\times (y^2 - 2x) =$ ③ $\times (x^2 - 2y)$ より

$$2x(y^2 - 2x) = 2y(x^2 - 2y) \quad \therefore \quad (x - y)\{2(x + y) + xy\} = 0 \quad \therefore \quad x = y \quad \text{or} \quad 2(x+y) + xy = 0$$

(i) $x=y$ のとき．①に代入して，$2x^2(x-3)=0 \quad \therefore \quad x=0$, 3. 今，$x=y$ より，$(x,y)=(0,0)$, $(3,3)$ を得る．特に，$(x,y)=(3,3)$ のときは，$\lambda=\dfrac{2}{3}$.

$$\begin{cases} A=A(x,y)=f_{xx}(x,y)-\lambda g_{xx}=2(1-3\lambda x) \\ H=H(x,y)=f_{xy}-\lambda\, g_{xy}=6\lambda \\ B=B(x,y)=f_{yy}-\lambda\, g_{yy}=2(1-3\lambda y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \Delta(x,y) &= A\,g_y(x,y)^2-2H\,g_x(x,y)\,g_y(x,y)+B\,g_x(x,y)^2 \\ &= 18\Big\{(1-3\lambda x)(y^2-2x)^2-6\lambda(x^2-2y)(y^2-2x)+(1-3\lambda y)(x^2-2y)^2\Big\} \end{aligned}$$

$\Delta(0,0)=0,\quad \Delta(3,3)=-18\times 126<0$. よって $f(3,3)=18$ は極大値である．$\Delta(0,0)=0$ なのでこの判定法では $f(0,0)=0$ が極値になるかどうかの判定はできないが，$f(x,y)=x^2+y^2 \geqq 0$ より，結果的に，$f(0,0)=0$ は最小値である． □

(ii) $2(x+y)+xy=0$ のとき，$xy=-2(x+y)$ を①に代入して

$$x^3+y^3-6xy=(x+y)^3-3xy(x+y)-6xy=(x+y)^3+6(x+y)^2+12(x+y)=0$$

$$\therefore \quad (x+y)\Big\{(x+y)^2+6(x+y)+12\Big\}=(x+y)\Big\{(x+y+3)^2+3\Big\}=0$$

$(x+y+3)^2+3>0$ ゆえ，$x+y=0 \quad \therefore \quad x=-y$ を得る．これを①に代入して $0=-y^3+y^3=-6y^2$．こうして，$x=y=0$. やはり，$\Delta(0,0)=0$ で極値の判定は不可能だが $f(x,y)\geqq f(0,0)=0$ より，$f(0,0)$ は最小値である □

7 実践的２重積分論

7.1 体積としての２重積分

x 軸上の区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)\geqq 0$ のグラフ $y=f(x)$（(x,y)-平面内の曲線）の $[a,b]$ 上の部分の面積はは

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

で与えられる．

次元を上げ類推し，(x,y)-平面上の曲線や線分で囲まれた領域 D で定義された連続関数 $f(x,y)\geqq 0$ のグラフ $z=f(x,y)$（(x,y,z)-空間内の曲面）の D 上の部分の体積を

$$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

で表すことにする．この積分を D 上の**2重積分**という．

$f(x,y)$ が $f(x,y) \geqq$ と限らない場合は，領域 D を $f(x,y) \geqq 0$ となる部分 $D+$ と $f(x,y) < 0$ となる部分 D_- に分ければ，

$$D = D_+ \cup D_- \; D_+ \cap D_- = \emptyset$$

$$D_+ := \Big\{(x,y) \in D \ : \ f(x,y) \geqq 0\Big\}, \quad D_- := \Big\{(x,y) \in D \ : \ f(x,y) < 0\Big\}$$

を得る．そのとき，$-f(x,y) > 0$ よりグラフ $z = -f(x,y)$ の D_- 上の部分の体積は

$$\iint_{D_-} (-f(x,y)) \, dxdy$$

で表される．こうして，

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D_+ \cup D_-} f(x,y)\, dxdy = \iint_{D_+} f(x,y)\, dxdy - \iint_{D_-} (-f(x,y))\, dxdy$$

と約束すれば，$f(x,y)$ の正負に関係なく 2 重積分が定義できる（大雑把な議論ではあるが・・）．

そこで，以下に，特別の領域 D と特別の連続関数 $f(x,y)$ に対して 2 重積分

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy$$

の具体的な値を計算する方法を解説する．

一般の領域や関数に対して定積分や 2 重積分の値を具体的に求めることは基本的には不可能である．

7.2 縦線集合

2 重積分の具体的値を求めることができる領域について考察する．しかし，被積分関数によっては積分の具体的値を求めることは不可能な場合もある．

2 重積分はその表示（表記）の問題と，具体的に積分値を求める問題とは異なる．

定義 7.1 (縦線集合)**.** ► 区間 $[a,b]$ で定義された異なる 2 つの連続関数 $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ が $\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を満たすとする．そのとき，集合

$$D_y := \Big\{(x,y) \ : \ a \leqq x \leqq b, \ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\Big\}$$

を y **方向縦線集合**と呼ぶ．特に，$\varphi_1(x)=c,\ \varphi_2(x)=d$（定数関数）のとき，$y$ 方向縦線集合 D_y は矩形（長方形領域）

$$D_y = Q = [a,b]\times[c,d] = \{(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b\ ,\ c \leqq y \leqq d\}$$

である．

▶ 同様に，x が y の関数として表されている場合，即ち，y の関数 $\psi_1(y),\ \psi_2(y)$ $(c \leqq y \leqq \psi_2(y)$ が与えられ

$$D_x := \Big\{(x,y)\ : \psi_(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\ ,\ c \leqq y \leqq d\Big\}$$

と表される集合を x **方向縦線集合**という．

$$D_x = Q = [a,b]\times[c,d] = \{(x,y)\ :\ c \leqq y \leqq d\ ,\ a \leqq x \leqq b\}$$

は x 方向縦線集合でもある．

縦線集合とは y 方向縦線集合または x 方向縦線集合をいう．y 方向縦線集合であり x 方向縦線集合である集合を**両方向縦線集合**という．矩形（長方形領域）$D=Q$ は両方向縦線集合である．即ち，$D=Q=D_x=D_y$ である．

例. (1) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれる部分 D は図示すればわかるように y 方向縦線集合である．実際,

$$D := D_y = \big\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 1\ ,\ x^2 \leqq y \leqq x\big\}$$

と表される．

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ において，$y=\sin x$ と放物線 $y=x^2-\pi\,x$ で囲まれる部分 D も y 方向縦線集合である．

$$D := D_y = \big\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq \pi\ ,\ x^2-\pi\,x \leqq y \leqq \sin x\big\}$$

(3) $\dfrac{1}{4}$ 円板 $D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq 1\ ,\ x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\}$ は両方向縦線集合である．実際.

$$\begin{aligned} D_y &= \Big\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 1\ ,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\Big\} \\ D_x &= \Big\{(x,y)\ : 0 \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2},\ 0 \leqq y \leqq 1\Big\} \end{aligned}$$

7.3 縦線集合での２重積分の計算

ここで取り扱う被積分関数は全て与えられた領域上で連続関数とする．

(1) $D = Q = [a,b] \times [c,d] = \{a \leqq x \leqq b\ ,\ c \leqq y \leqq d\}$ を矩形（長方形領域）集合とする．$f(x,y)$ を D で定義された連続関数とする．そのとき，集合 D 上の２重積分は $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値は

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dy\right) dx$$

によって求める．

(2) D が y 方向縦集合上 $D := D_y = \Big\{(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b\ ,\ \varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)\Big\}$ のときは，D 上の２重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値を

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

で求めることができ，D が x 方向縦線集合，即ち，

$$D = D_x = \Big\{(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b\ ,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\Big\}$$

のときも，D_x 上の２重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値を

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

で求めることができる．D だ両方向縦線集合として表されるとき

$$D = D_y = \Big\{(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b\ ,\ \varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)\Big\} = D_x = \Big\{(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b\ ,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\Big\}$$

と表されるとき，

$$\iint_{D_y} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx = \iint_{D_x} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$$

が成立する．

例題 7.1. 次の２重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$,　但し，　$D=[-1,1]\times[-1,1]$.

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\Big[x^2y+\frac{y^3}{3}\Big]_{-1}^{1}dx\\ &= \int_{-1}^{1}\left(2x^2+\frac{2}{3}\right)dx=\Big[\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^3\Big]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$,　但し　$D=\{1\leqq 2,\ x\leqq y\leqq x^2\}$.

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)\,dxdy &= \int_{1}^{2}\left(\int_{x}^{x^2}(x+y)\,dy\right)dx=\int_{1}^{2}\Big[xy+\frac{1}{2}y^2\Big]_{y=x}^{x^2}dx\\ &= \int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{3}{2}x^3\right)dx=\Big[\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3\Big]_{1}^{2}=\frac{67}{30}\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\iint_D 2x\,dxdy$, 但し，　$D=\{|x-1|+y\leqq 1,\ y\geqq 0\}$.

領域 $|x-1|+y\leqq 1$ を (x,y)-平面上に図示すれば分かるが

$$D=\{y\leqq x\leqq 2-y\ ,\ 0\leqq y\leqq 1\}$$

よって，

$$\iint_D 2x\,dxdy=\int_0^1\left(\int_y^{2-y}2x\,dx\right)dy=\int_0^1\Big[x^2\Big]_y^{2-y}dy=\int_0^1(-4y+4)\,dy=\Big[-2y^2+4y\Big]_0^1=2$$

一方，$|x-1|+y\leqq 1$ の図示から

$$D=\{0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\}\cup\{1\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2-x\}=D_1\cup D_2$$

と表すことができることがわかる.

$$\begin{aligned}\iint_D 2x\,dxdy &= \iint_{D_1}2x\,dxdy+\iint_{D_2}2x\,dxdy\\ &= \int_0^1\left(\int_0^x 2x\,dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_0^{2-x}2x\,dy\right)dx\\ &= \int_0^1\Big[2xy\Big]_0^x dx+\int_1^2\Big[2xy\Big]_0^{2-x}dx\\ &= \int_0^1 2x^2\,dx+\int_1^2 4x(2-x)\,dx=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2\end{aligned}$$

（註）$|x-1|+y\leqq 1,\ y\geqq 0$ より，D を縦線領域として記述すると，

(i) $0 \leqq x \leqq 1$ のときは $1-x+y \leqq 1 \quad \therefore 0 \quad y \leqq x$ よって，$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x$,

即ち，$\{y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$.

(ii) $x \geqq 1$ のとき，$x-1+y \leqq 1 \quad \therefore \quad 1 \leqq x \leqq 2-y \leqq 2$. よって，

$\{0 \leqq y \leqq 1,\ 1 \leqq x \leqq 2-y\}$.

(i),(ii) より，$y \leqq x \leqq 1 \leqq x \leqq 2-y$.

$$\therefore \quad D = \{0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 2-y\}$$

(4) $\displaystyle\iint_D (x+\frac{2}{x})e^{\frac{y}{x}}\,dxdy, \quad$ 但し，$\quad D = \{1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq x^2\}$

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+\frac{1}{x})e^{\frac{y}{x}}\,dxdy &= \int_1^2 \left(\int (x+\frac{1}{x})e^{\frac{y}{x}}\,dy\right)dx = \int_1^2 \left[(x+\frac{1}{x})\,xe^{\frac{y}{x}}\right]_x^{x^2} dx \\
&= \int_1^2 (x^2+1)(e^x-e)\,dx = \int_1^2 (x^2+1)\,e^x\,dx - e\int_1^2 (x^2 * 1)\,dx \\
&= \Big[(x^2+1)e^x\Big]_1^2 - 2\int_1^2 xe^x\,dx - e\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^2 \\
&= 5e^2-2e-2\Big[(x-1)e^x\Big]_1^2 - \frac{10}{3}\,e = 5e^2-2e-2e^2-\frac{10}{3}\,e \\
&= 3e^2-\frac{16}{3}\,e
\end{aligned}$$

7.4 広義 2 重積分

定義 7.2. 直線や曲線で囲まれた部分を D を領域と呼ぶ．領域 D の境界を ∂D で表す．∂D は D を囲む直線や曲線もしくは点からなる．領域 D に境界を付加して得られる集合を $\overline{D}$（D の閉包という）で表す．

例. (1) $\overline{(0,1)} = \overline{(0,1]} = \overline{[0,1)} = [0,1]$

(2) $\overline{(0,1)\times(0,1)} = \overline{(0,1]\times(0,1]} = \overline{[0,1)\times[0,1)} = \overline{(0,1)\times[0,1]} = [0,1]\times[0,1]$

(3) $\overline{\{x^2+y^2<R^2\}} = \left\{x^2+y^2 \leqq R^2\right\}$, $\overline{\{0<x^2+y^2<R^2\}} = \left\{x^2+y^2 \leqq R^2\right\}$

2 変数関数 $f(x,y)$ が領域 D では連続であるが，$\overline{D}$ では有界でないとき，例えば D の境界点で値が ∞ になるとき，2 重積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dxdy$（**広義 2 重積分**という）の値を求める問題を，厳密な議論を避け，実用性の観点から考察する．

注意 7.1. ► 関数 $f(x)$ が (a,b) で連続で $f(a)=f(b)=\infty$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx$$

の極限値として定義した．これを 2 重積分の場合に拡げたものが広義 2 重積分である．

► $f(x,y)$ が領域 D で連続だが $\overline{D}$ では非有界（d の境界点で値が ∞）のときは，D を次を満たす領域 D_n の単調増加列の極限として表す．即ち，

(i) $\overline{D}_n\subset D_{n+1}\subset\overline{D}_{n+1}\subset D_{n+2}\ldots$ であって，

$$\lim_{n\to\infty}\overline{D}_n=D$$

(ii) $f(x,y)$ は各 $\overline{D}_n$ で連続である．

そのとき，$\displaystyle\int_D f(x,y)\,dxdy$ を

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\overline{D}_n} f(x,y)\,dxdy$$

の極限値（勿論，収束することが前提）として定義する．

例. (1) $D(r,R)=\Big\{(x,y)\ :\ r^2<x^2+y^2<R^2\Big\}$ ならば

$$\lim_{r\to 0}\overline{D}(r;R)=\Big\{(x,y)\ :\ 0<x^2+y^2\leqq R^2\Big\}$$

$$\lim_{r\to 0}D(r;R)=\Big\{(x,y)\ :\ 0<x^2+y^2<R^2\Big\}$$

例題 7.2. $I=\displaystyle\iint_D\frac{x}{(x+y)^2}\,dxdy,$ 　但し $D=(0,1]\times(0,1]$ の値を求める．

$f(x,y)=\dfrac{x}{(x+y)^2}$ だ D で有界でない．そこで $\overline{D}_n=[\frac{1}{n},1]\times[0,1]$ とおくと，$\overline{D}_n$ は単調増加列で $f(x,y)$ は $\overline{D}_n$ で連続だから積分可能.

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{\overline{D}_n}\frac{y}{(x+y)^2}\,dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^1\frac{y}{(x+y)^2}\,dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^1\Big[\log|x+y|+\frac{x}{x+y}\Big]_0^1dx\\
&= \Big[x\log|x+1|-x\log|x|-1\Big]_{\frac{1}{n}}^1\\
&= \log 2-\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}=0$$

より，

$$\therefore \quad I = \lim_{n\to\infty} I_n = \log 2$$

□

7.5　補遺

問題の背後にある数学を知ることが単に答えを求めることより遥かに重要である．ここでは，２つの問題に対してその背後にある数学について解説を試みる．

例題 7.3.　(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$

（解）(1): (x, y) 平面上に下記の領域を図示すれば分かるように

$$D(R) := \{x^2+y^2 \leqq R^2,\ x, y \geqq 0\} \subset Q(R) := \{0 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq R\} \subset D(\sqrt{2}R) := \{x^2+y^2 \leqq 2R^2,\ x, y \geqq 0\}$$

が成り立つ．

(i) 領域 D で $f(x, y) \geqq 0$ ならば

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy \geqq 0$$

(ii) 領域 D で $f(x, y) \geqq 0$ ならば部分領域 $D_0 \subset D$ に対し

$$\iint_D \varphi(x, y)\,dxdy \geqq \iint_{D_0} f(x, y)\,dxdy \geqq 0$$

このことから $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} > 0$ に対し

$$\iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \leqq \iint_{Q(R)} e^{-(x^2+y^2)})\,dxdy \leqq \iint_{D(\sqrt{2}\,R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

そこで

$$\begin{cases} \text{(i)} : I(R) := \displaystyle\iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\{x^2+y^2\leqq R^2,\ x\geqq 0, y\geqq 0\}} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\[2ex] \text{(ii)} : J(Q) := \displaystyle\iint_{\{0\leqq x\leqq R,\ 0\leqq y\leqq R\}} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\{0\leqq x\leqq R,\ 0\leqq y\leqq R\}} e^{-(x^2+y^2)\,dxdy} \\[2ex] \text{(iii)} : I(\sqrt{2}\,R) := \displaystyle\iint_{D(\sqrt{2}\,R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\{x^2+y^2\leqq 2R^2,\ x\geqq 0, y\geqq 0\}} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \end{cases}$$

とおく．このとき，

$$I(R) \leqq J(Q) \leqq I(\sqrt{2}\,R)$$

今，

(i) $I(R)$ の計算：$D(R)$ を $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ (0 \leqq r \leqq R,\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2})$ と極座標で表すと，$dxdy = rdrd\theta$ であることから

$$I(R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R e^{-r^2} rdr \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-R^2} \right)$$

(iii) $I(\sqrt{2}\,R)$ の計算：$D(\sqrt{2}\,R)$ も同様に $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ (0 \leqq r \leqq \sqrt{2}\,R,\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2})$ と極座標で表示されるので，

$$I(\sqrt{2}\,R) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$$

(ii) $J(Q$ の計算:

$$\begin{aligned} J(Q) &= \iint_Q e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\{0 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq R\}} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\ &= \int_0^R \left(\int_0^R e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\,dy \right) dx = \int_0^R \left(\int_0^R \cdot e^{-y^2}\,dy \right) e^{-x^2}\,dx \\ &= \left(\int_0^R e^{-y^2}\,dy \right) \int_0^R e^{-x^2}\,dx \overset{y=x}{\equiv} \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx \right)^2 \end{aligned}$$

こうして，

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \leqq \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx \right)^2 \leqq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})} \leqq \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx \right) \leqq \sqrt{\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})}$$

故に，$R \to \infty$ のとき，

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqq \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx \right) \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

最終的に

$$\lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx \right) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(註): $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$　そこで, $x = \dfrac{t-\mu}{\sqrt{2}\cdot\sigma}$ とおくと, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2}\cdot\sigma}$ より

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dt}{\sqrt{2}\cdot\sigma}$$

こうして，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1$$

関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ は統計学で登場する**正規分布** $N(\mu, \sigma^2)$ の**確率密度関数**である．

（解）(2):

$a > 0$ のとき，(i) : $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^a \log x = 0$,　(ii) : $\displaystyle\lim_{x\to\ +\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$.

$(\because)$　(i) の証明．$0 \times (-\infty)$ の不定形ゆえ，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+0} x^a \log x = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\log x}{x^{-a}} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\dfrac{1}{x}}{-ax^{-a-1}} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{(-1)}{a}x^a = 0$$

(ii) の証明．$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので同様にロピタルの定理から

$$\lim_{x\to\ +\infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{x\to\ +\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to\ +\infty} \frac{1}{ax^a} = 0$$

特に，$a = \dfrac{1}{2}$ とおいて，

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x}\log\sin x = \sqrt{x}\left(\log(x\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \sqrt{x}\left(\log x + \log\frac{\sin x}{x}\right) = \sqrt{x}\log x + \sqrt{x}\cdot\log\frac{\sin x}{x}$$

今，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x = 0$,　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$ $\therefore$ $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log\frac{\sin x}{x} = \log 1 = 0$. 故に，

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}\cdot\log\sin x = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}\cdot\log x + \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}\log\frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}\cdot\log x + \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}\cdot\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log\frac{\sin x}{x} = 0$$

$\epsilon - \delta$ 法によれば，

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = A$ とは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$0 < |x| < \delta$ を満たす全ての x に対して，$|g(x) - A| < \epsilon$ を満たすということであった．

今，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log\sin x = 0$ より，$\epsilon = 1$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$0 < |x| < \delta$ に対し，

$$\left|\sqrt{x}\log\sin x\right| < 1 \quad \therefore \quad |\log\sin x| < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

が成り立つ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\log\sin x|\ dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

よって，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$ は絶対収束する．

（註）このことが保証されるから置換積分や部分積分などの操作ができるのである．収束しなかったらこれらの操作は意味をなさない．こうして広義積分の変数変換や部分積分には特別の注意が必要である！

さて，広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$ において，変数変換 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ を行うと $dx = -dt$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq 0 \qquad \therefore$

x	$0 \longrightarrow \pi/2$
t	$\pi/2 \longrightarrow 0$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log\left(\sin(\frac{\pi}{2} - t)\right)(-dt) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log\cos t\,(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos t\,dt$$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,dx$$

次に

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\sin x + \log\cos x)\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x\cdot\cos x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad \overset{t=2x}{=} \quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin t\,dt - \frac{\pi}{2}\log 2 \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin t\,dt\Big\} - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad \overset{x=\pi-t}{=} \quad \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log\sin(\pi - x)\,(-dx) - \frac{\pi}{2}\log 2 \\
&= \frac{1}{2}I + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx - \frac{\pi}{2}\log 2 = I - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad \therefore \quad \underline{I = -\frac{\pi}{2}\log 2}
\end{aligned}$$